Chapitre 2

Ensembles - Applications

1 Ensembles

1.1 Définitions - Généralités

Définition 1.1.
On appelle ***ensemble*** *une collection d'objets.*

Définition 1.2 (inclusion)**.**
Soient A et B deux ensembles, on dit que A est ***inclus*** *dans B ou A est une* ***partie*** *de B si pour tout x de A, alors x est élément de B. On note alors $A \subset B$ et $\mathcal{P}(A)$* ***l'ensemble des parties*** *de A.*

Exemple 1.1. *si $E = \{1, 2, 3\}$:*

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}.$$

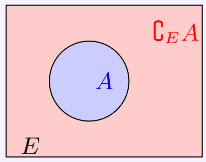
Remarques.

(*i*) *On peut exprimer l'inclusion de A dans B comme suit :*
$$\boxed{\forall x \in E,\ x \in A \implies x \in B.}$$
(*ii*) *On a $\varnothing \subset A$ et $A \subset A$ pour tout ensemble A.*
(*iii*) *La négation de $A \subset B$ notée $A \not\subset B$ signifie que :*
$$\boxed{\exists x \in A,\ x \notin B.}$$
(*iv*) $A = B \iff (A \subset B$ et $B \subset A)$.
(*v*) $A \neq B \iff (A \not\subset B)$ *ou* $(B \not\subset A)$.
(*vi*) $(A \subset B$ et $B \subset C) \implies (A \subset C)$ ***transitivité.***

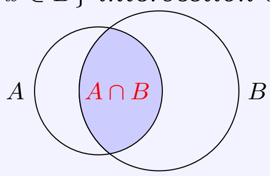
1.2 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Définitions 1.1.
Soient E un ensemble, A et B des parties de E, on définit :

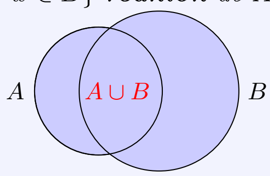
(i) $\complement_E(A) = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$ ***complémentaire*** *de A dans E. On le note aussi $E \setminus A$ et $\overline{A}$.*



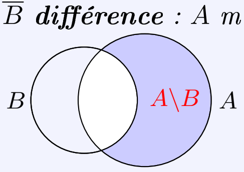
(ii) $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \quad$ ***et*** $\quad x \in B\}$ ***intersection*** *de A et B.*



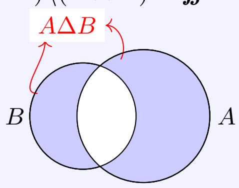
(iii) $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \quad$ ***ou*** $\quad x \in B\}$ ***réunion*** *de A et B.*



(iv) $A \backslash B = \{x \in A \,/\, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$ ***différence*** *: A moins B.*



(v) $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ ***différence symétrique*** *de A et B.*



Proposition 1.1.
Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

(i) $A \cap B = B \cap A$ *et* $A \cup B = B \cup A$ ***(commutativité)*** *;*

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *et* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. *On peut donc écrire simplement $A \cap B \cap C$ et $A \cup B \cup C$* ***(associativité)*** *;*

(iii) $A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cup \varnothing = A$ *;*

(iv) $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$ *;*

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ***(distributivité)*** *;*

(vi) $\overline{(\overline{A})} = A, \quad A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$ *;*

(vii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ***(lois de Morgan)****.*

Définition 1.3.
Soit $(E_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *une famille de parties de* E*, on note* $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} E_i = \{x \in E \,/\, \exists i \in \mathbf{N},\, x \in E_i\}$ *et* $\bigcap_{i\in\mathbf{N}} E_i = \{x \in E \,/\, \forall i \in \mathbf{N}, x \in E_i\}$

1.3 Partition

Définition 1.4.
Soit I *une partie de* $\mathbf{N}$ *et* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille de parties d'un ensemble* E*, on dit que cette famille forme une* ***partition*** *de* E *si :*

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} E_i = E \\ \forall (i,j) \in I^2 / \; i \neq j \;, \quad E_i \cap E_j = \varnothing \\ \forall i \in I \;, \quad E_i \neq \varnothing. \end{cases}$$

1.4 Produit cartésien

Définition 1.5.
Soient E *et* F *deux ensembles, on appelle* ***produit cartésien*** *de* E *et* F *l'ensemble* $E \times F = \{x = (x_1, x_2) \,/\, x_1 \in E, x_2 \in F\}$

Remarque. Cette définition s'étend au produit cartésien d'une famille d'ensembles

Exercices d'application.

1. *Montrer que* $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A$.
2. *Énumérer* $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$.

2 Applications

2.1 Définitions - Généralités

Définitions 2.1.
Soient E *et* F *deux ensembles.*

(i) *On appelle* ***fonction*** *de* E *vers* F *toute relation* f *de* E *vers* F *telle que pour tout élément* x *de* E*, on lui associe au plus un élément* y *de* F *; on écrit* $y = f(x)$.

(ii) *On appelle* ***ensemble*** *(ou* ***domaine de définition*** *de la fonction* f*, l'ensemble des éléments* x *de* E *tels qu'il existe* y *de* F *vérifiant* $y = f(x)$ *; cet ensemble est noté* $\mathcal{D}_f$.

(iii) *Une fonction* f *est appelée* ***application*** *lorsque* $\mathcal{D}_f = E$.

Remarques.

1. *L'ensemble des applications de* E *vers* F *est noté* F^E *ou* $\mathcal{F}(E, F)$.
2. *On note souvent* $f : E \to F, \quad f : x \mapsto f(x)$.
   $f(x)$ *est l'****image*** *de* x *par* f *(élément de* F *associé à* x *par* f*).*

3. *$f : E \to F, g : F \to G$ deux applications, on définit $gof : E \to G$ par $gof(x) = g(f(x))$ pour tout x de E.*

4. *$f : E \to E$ définie par $f(x) = x$ pour tout élément x de E est appelée* ***application identique*** *dans E et notée Id_E.*

5. *Soient A une partie de E et $f : E \to E$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \in A \\ 0 & si\ \ x \notin A \end{cases}$ est appelée* ***fonction indicatrice*** *de la partie A et notée 1_A.*

Exemple 2.1.

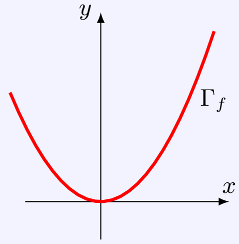
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 3x - 1$.
Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Proposition 2.1 (associativité)**.**
Pour toutes applications $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Définition 2.1.
Le ***graphe*** *de $f : E \to F$ est :*

$$\Gamma_f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E \Big\}$$



2.2 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définitions 2.2.
Soit f une application de E vers F, on dit que :

(i) f *est* ***injective*** *si :*

$$\forall (a,b) \in E^2,\ a \neq b \implies f(a) \neq f(b);$$

ou encore

$$\forall (a,b) \in E^2,\ f(a) = f(b) \implies a = b.$$

(ii) f *est* ***surjective*** *si :*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

(iii) f *est* ***bijective*** *si f est injective et surjective, ou encore :*

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$

Dans ce cas, f admet une bijection réciproque f^{-1} de F vers E telle que :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Exercices d'application.

1. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = x^2$ *; montrer que f est injective non surjective.*
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}$ *; montrer que f est surjective non injective.*
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = x^3$ *; montrer que f est bijective.*
4. *Soit* $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *; montrer que* sh *est une bijection et déterminer son application réciproque.*

Proposition 2.2.

(i) $f : E \to F$ *;* f *bijective si, et seulement s'il existe* $g : F \to E$ *telle que* $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ *et* $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

(ii) *Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la* ***bijection réciproque*** *de f et est notée f^{-1}. De plus $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

(iii) *La composée de deux bijections est une bijection et on a :*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exemple 2.2.

$f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ est bijective, sa bijection réciproque est $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \ln(y)$. On a bien $\exp\big(\ln(y)\big) = y$, pour tout $y \in]0, +\infty[$ et $\ln\big(\exp(x)\big) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.3.
Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

(i) *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
(ii) *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*
(iii) *La composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection).*
(iv) *La composée de deux bijections est une bijection et on a :*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Définition 2.2.
*Soit f une application de E vers E. Si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ on dit que f est **involutive**, donc f est bijective et $f^{-1} = f$.*

Exemple 2.3.
$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ *définie par* $f(x) = 1/x$ *est involutive.*

2.3 Restriction et prolongement

Définition 2.3.
Soit f une application de E vers F.

(i) *Soit A une partie de E, l'application $g : A \to F$ définie par $\forall x \in A,\ g(x) = f(x)$ est appelée **restriction** de f à A et est notée $f|_A$.*
(ii) *Soit E' une partie contenant E, l'application $h : E' \to F$ définie par $\forall x \in E,\ h(x) = f(x)$ est appelée **prolongement** de f à E'.*

Exemple 2.4.
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$; f admet une infinité de prolongement sur $\mathbb{R}$.

2.4 Images directes ou réciproques de parties par une application

Définitions 2.3.
Soit f une application de E vers F.

(i) *Pour toute partie A de E on définit l'**image directe** de A par f, noté $f(A)$, par :*
(ii) *$f(A) = \{f(x) \in F \,/\, x \in A\}$.*
(iii) *Pour toute partie B de F on définit l'**image réciproque** de B par f, noté $f^{-1}(B)$, par :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}.$$

Exercices d'application.

1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 4$; déterminer $f(\mathbb{R}_+)$, $f([-2, 3])$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}([0, 1])$.*
2. *$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; déterminer $f(\mathbb{R}_+)$, $f(]-1, 0])$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}([0, 1[)$.*

Proposition 2.4.
Soit f une application de E vers F.

(i) On a pour toutes parties A et B de E :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

(ii) On a pour toutes parties A' et B' de F :

(a) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$;
(b) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$;
(c) $f^{-1}\left(\overline{A'}\right) = \overline{f^{-1}(A')}$.

(iii) Soit A une partie de E et A' une partie de F, on a :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \quad \text{et} \quad f\left(f^{-1}(A')\right) \subset A'.$$

Définition 2.4.
Soient $A \subset E$ et $f : E \to E$.
*On dit que A est **stable** par f si $f(A) \subset A$ et on dit que A est **invariant** par f si $f(A) = A$.*

3 Relations

3.1 Définitions et généralités

Définition 3.1.
*Soient E et F deux ensembles, on appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ de E vers F un triplet (E, F, G) où G est une partie de $E \times F$ (appelé **graphe** de la relation).*
Pour $x \in E, y \in F$, on note $x\,\mathcal{R}\,y$ lorsque $(x, y) \in G$.

Remarque.
Si $E = F$ une relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers lui-même est dite **relation** dans E.

Définitions 3.1.
Soit $\mathcal{R}$ une relation dans un ensemble E. On dit que :

(i) $\mathcal{R}$ *est **réflexive** si* $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$;
(ii) $\mathcal{R}$ *est **symétrique** si* $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;
(iii) $\mathcal{R}$ *est **transitive** si* $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\boldsymbol{R}z$;
(iv) $\mathcal{R}$ *est **antisymétrique** si* $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$.

3.2 Relation d'équivalence

Définition 3.2.
*Soit $\mathcal{R}$ une relation dans un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Remarque.
soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x \in E$.
$\overline{x} = \{y \in E \ /\ y\mathcal{R}x\}$ est appelé **classe d'équivalence** de x.