TD AL 2 : Ensembles - Applications

Exercice 1

Soit E un ensemble. Montrer pour toutes parties A, B et C de E :
1/ $A \subset B \iff A \cup B = B$;
2/ $A = B \iff A \cup B = A \cap B$;
3/ $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A} \iff A \setminus B = \varnothing \iff \overline{A} \cup B = E$;

Solution:

1/ Supposons $A \subset B$, alors $A \cup B \subset B \cup B = B$, l'autre inclusion, $B \subset A \cup B$, est triviale, donc $A \cup B = B$.
Supposons maintenant que $A \cup B = B$, par définition $A \subset A \cup B = B$.
2/ Supposons que $A = B$, alors $A \cup B = B = A$ et $A \cap B = B = A$, d'où l'égalité : $A \cup B = A \cap B$.
Supposons maintenant que $A \cup B = A \cap B$, on a : $A \subset A \cup B = A \cap B \subset A$, d'où $A = A \cup B = A \cap B$.
En appliquant le même raisonnement à B, on conclut que $A = B$.
3/

- $A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$:
  Par hypothèse $A \subset B$ que l'on peut traduire par :$\forall x \in A \implies x \in B$, puis par contraposition , on en déduit que $\forall x \notin B \implies x \notin A$, c'est-à-dire $\forall x \in \overline{B} \implies x \in \overline{A}$. Ainsi $\overline{B} \subset \overline{A}$.
- $\overline{B} \subset \overline{A} \implies A \setminus B = \varnothing$:
  On a $A \setminus B = A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{A} = \varnothing$.
- $A \setminus B = \varnothing \implies \overline{A} \cup B = E$:
  On a $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \varnothing$, par passage aux complémentaires et en utilisant la formule de Morgan, on obtient $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B = \overline{\varnothing} = E$.
- $\overline{A} \cup B = E \implies A \subset B$:
  Soit $x \in A \subset E$, alors $x \in E = \overline{A} \cup B$ et comme $x \notin \overline{A}$, on en déduit que $x \in B$.
  On vient donc de prouver que $A \subset B$.

On vient donc de démontrer, par implications « circulaires » les équivalences demandées.

Exercice 2

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.
Montrer que $A \Delta B = C \implies (A \Delta C = B \text{ et } B \Delta C = A)$.

Solution:
Par définition $A \Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$, on en déduit, grâce à la distributivité, que :

$$\begin{aligned} A \Delta C &= \left[A \cap \left[\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)}\right]\right] \cup \left[\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right] \cap \overline{A}\right] \\ &= \left[A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{B} \cup A\right)\right] \cup \left[B \cap \overline{A}\right] \\ &= \left[(A \cap B) \cap \left(\overline{B} \cup A\right)\right] \cup \left[B \cap \overline{A}\right] \\ &= [B \cap A] \cup \left[B \cap \overline{A}\right] = B \end{aligned}$$

On peut faire le même raisonnement en permutant les lettres B et A pour obtenir $B \Delta C = A$.

Exercice 3

Soient F, G et H trois sous-ensembles non vides d'un ensemble E. Montrer que :

$$[(F \cup G) \subset (F \cup H) \text{ et } (F \cap G) \subset (F \cap H)] \implies (G \subset H).$$

Solution:
Soit $x \in G \subset F \cup G$, comme $F \cup G \subset F \cup H$, alors $x \in F$ ou $x \in H$.
Si $x \in H$, la preuve est finie.
Si $x \in F$, alors $x \in F \cap G \subset F \cap H$ et par suite $x \in H$.
Dans tous les cas $x \in H$ ce qui établit que $G \subset H$.

Exercice 4

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

1/ $f : [\![0, n]\!] \to [\![0, 2n]\!],\ f : k \mapsto 2k$

2/ $f : [0; 1] \to [-1; 1]\,,\ f : x \mapsto x^2$

3/ $f : [0; \pi] \to [-1; 1]\,,\ f : x \mapsto \sin x$

4/ $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

5/ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

6/ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y^2)$.

Solution:

1/ $f : [\![0, n]\!] \to [\![0, 2n]\!],\ f : k \mapsto 2k$:

— Injectivité :
Soit $k, k' \in [\![0, 2n]\!],\ 2k = 2k' \implies k = k'$ Donc f est injective.

— Surjectivité :
Si $y = 1$, pour tout $k \in [\![0, 2n]\!],\ 2k \neq 1$. Donc f n'est pas surjective.

— Bijectivité :
Il en résulte de l'étude précédente que f est non bijective.

2/ $f : [0; 1] \to [-1; 1]\,,\ f : x \mapsto x^2$

— Injectivité :
Soit $x, x' \in [0, 1],\ x^2 = x'^2 \implies |x| = |x'|$ ainsi $x = x'$ car ils sont positifs. Donc f est injective.

— Surjectivité :
Si $y = -1$, pour tout $x \in [0, 1],\ x^2 \neq -1$. Donc f n'est pas surjective.

— Bijectivité :
f est non bijective car elle n'est pas surjective.

3/ $f : [0; \pi] \to [-1; 1]\,,\ f : x \mapsto \sin x$

— Injectivité :
Pour $x = 0$ et $x' = \pi$, on a $x \neq x'$ mais $f(x) = f(x') = 0$, d'où f est non injective.

— Surjectivité :
$f([0, \pi]) = [-1, 1]$, donc f est surjective.

— Bijectivité :
f est non bijective car elle n'est pas injective.

4/ $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

— Injectivité :
Soit $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\,,\ \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x'}{x'-1} \implies (x-1)x' = (x'-1)x$ d'où $x = x'$. f est donc injective.

— Surjectivité :
Une étude de la fonction de f permet de remarquer que 1 est une valeur non atteinte par f. Vérifions donc que 1 n'a pas d'antécédent par f. En effet, $f(x) = 1 \iff \dfrac{x}{x-1} = 1 \iff x = x - 1 \iff 0 = -1$ ce qui est absurde. f est donc non surjective

— Bijectivité :
f n'est pas bijective.

5/ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

On remarque que x et y jouent des rôles symétriques dans la définition de f, c'est-à-dire $f(x, y) = f(y, x)$.

— Injectivité :
Il est clair que $(1, 0) \neq (0, 1)$ et $f(1, 0) = f(0, 1) = (1, 0)$. Ainsi f est non injective.

— Surjectivité :
Étant donné $(S, P) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $f(x, y) = (S, P)$ si, et seulement si $\{x, y\}$ sont solutions du trinôme du second degré $X^2 - SX + P = 0$. Il suffit donc de choisir $(S, P) = (0, 1)$ pour établir qu'il n'y a pas de réels vérifiant $X^2 + 1 = 0$, d'où f est non surjective.

— Bijectivité :
f est non bijective.

6/ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y^2)$.

— Injectivité :
Soit $(x, y),\ (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = f(x', y')$. On a donc $\begin{cases} x - y = x' - y' \\ x + y^2 = x' + y'^2 \end{cases}$. En retranchant la première équation

de la seconde, on obtient $y^2+y=y'^2+y'$ ou encore $(y^2-y'^2)+(y-y')=0$ soit $(y-y')(y+y'+1)=0$. Il est clair que l'on n'a pas nécessairement $y=y'$ et que l'on peut avoir $y+y'+1=0$. On se base sur cette dernière identité pour établir que f n'est pas injective.
On choisit $y=0$ et $y'=-1$ et en tenant compte de l'équation $x-y=x'-y'$ on prend $x=0$ et $x'=-1$.
En résumé, on a $(0,0)\neq(-1,-1)$ mais $f(0,0)=f(-1,-1)=(0,0)$, ce qui suffit pour dire que f n'est pas injective.

— Surjectivité :
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on cherche à savoir si ce couple admet au moins un antécédent par f, c'est-à-dire l'existence de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x-y=a \\ x+y^2=b \end{cases}$. Ce dernier système entraîne que $y^2+y=b-a$, or ce trinôme n'admet pas nécessairement des solutions réels, il suffit de prendre $(a,b)=(1,0)$ pour remarquer que le trinôme du second degré $y^2+y+(a-b)=y^2+y+1=0$ n'a pas de racines réelles. f est donc non surjective.

— Bijectivité :
f n'est pas bijective.

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$f(x)=2x \text{ et } g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}.$$

1/ Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
2/ Préciser $g\circ f$ et $f\circ g$, conclure.

Solution:

1/ Étude de f

— Injectivité :
Soit $k,k'\in\mathbb{N},\ 2k=2k' \implies k=k'$ Donc f est injective.

— Surjectivité :
Si $y=1$, pour tout $k\in\mathbb{N},\ 2k\neq 1$. Donc f n'est pas surjective.

— Bijectivité :
f est donc non bijective.

Étude de g

— Injectivité :
Soit $k=2, k'=3$, on a $k\neq k'$ et $g(k)=g(k')=1$. D'où g est non injective.

— Surjectivité :
Si $y\in\mathbb{N}$, alors $x=2y\in\mathbb{N}$ vérifie $g(x)=\dfrac{x}{2}=\dfrac{2y}{2}$ car $x=2y$ est pair. D'où g n'est pas surjective.

— Bijectivité :
g est alors non bijective.

2/ Pour tout $x\in\mathbb{N}$, $g\circ f(x)=g\left[f(x)\right]=g(2x)=\dfrac{2x}{2}=x$, on en déduit que $g\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

D'autre part, $f\circ g(x)=f\left[g(x)\right]=2g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x \text{ est pair} \\ x-1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$. Donc $g\circ f\neq f\circ g$.

Exercice 6

Soient E, F, G des ensembles ; $f:E\to F$, $g:F\to G$ des applications. Montrez que :
1/
a) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.
b) Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
c) Montrer que si pour toutes parties A et B de E, $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ alors f est injective.
2/ Montrer que pour toutes parties Y_1 et Y_2 de F, $f^{-1}(Y_1\cup Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$.
3/ si $g\circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
4/ si $g\circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Solution:

1/
a) Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe au moins $x \in A \cap B$, tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, de même $x \in B$, donc $f(x) \in f(B)$. On vient de prouver que $y \in f(A) \cap f(B)$, ce qui montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
b) L'application $f : x \mapsto x^2$ vérifie pour $A = [0,1]$ et $B = [-1,0]$: $f(A) = f(B) = f(A) \cap f(B) = [0,1]$ et $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$
c) Soit $x, x' \in E$, tels que $x \neq x'$. Posons $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. On a $A \cap B = \varnothing$, d'où $f(A \cap B) = \varnothing$ et comme $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, alors $f(A) \cap f(B) = \varnothing$. Or $f(A) = f(\{x\}) = \{f(x)\}$ et $f(B) = f(\{x'\}) = \{f(x')\}$, alors $f(x) \neq f(x')$ ce qui signifie que f est injective.
2/ $\forall x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \iff f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \iff f(x) \in Y_1$ ou $f(x) \in Y_2 \iff x \in f^{-1}(Y_1)$ ou $x \in f^{-1}(Y_2) \iff x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
3/ Soit $y_1, y_2 \in F$, tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Comme f est surjective, alors il existe au moins $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. On a donc $g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2))$ et comme $g \circ f$ est injective, d'où $x_1 = x_2$ et par suite $f(x_1) = f(x_2)$ car f est une application. Ainsi, $y_1 = y_2$ ce qui prouve que g est injective.
4/ Soit $y \in F$, alors $g(y) \in G$. Sachant que $g \circ f$ est surjective, il existe donc $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(y)$ soit $g(f(x)) = g(y)$. Comme g est injective, alors $y = f(x)$ ce qui montre que f est surjective.

Exercice 7

Soit $f : E \to F$ une application. Montrez que :
1/ f surjective $\iff \big(\forall\, B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B\big)$.
2/ f injective $\iff \Big(\forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}\Big)$

Solution:

1/ • Supposons que f est surjective.
Soit $y \in B$, alors il existe au moins $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective. On a donc $f(x) \in B$ ce qui se traduit par $x \in f^{-1}(B)$. Au final, $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ et donc $B \subset f(f^{-1}(B))$.
Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, alors il existe au moins $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, mais par définition $x \in f^{-1}(B)$ équivaut à $f(x) \in B$ soit $y \in B$. On vient donc de prouver que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et par conséquent $f(f^{-1}(B)) = B$.
• Supposons que pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.
Soit $y \in F$, posons $F = \{y\}$, on a donc $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. Or cette dernière identité signifie qu'il existe au moins un $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $f(x) = y$ ce qui montre que f est surjective.
2/ • Supposons que f est injective.
Soit $y \in f(\overline{A})$, alors il existe au moins un $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$.
Si $y \in f(A)$, alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ mais comme f est injective, donc $y = f(x) = f(a)$ entraîne $x = a$ ce qui est absurde car $x \in \overline{A}$ et $a \in A$. Par conséquent, $y = f(x) \notin f(A)$ c'est-à-dire $y \in \overline{f(A)}$ On vient de prouver que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
• Réciproquement, supposons que $\forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Exercice 8

Déterminer les propriétés des relations // (parallèle à) et $\perp$ (orthogonale à) dans l'ensemble des droites du plan.

Solution:
• La relation // est réflexive, symétrique et transitive.
• La relation $\perp$ n'est ni réflexive ni transitive mais elle est symétrique.