DM n° 6

Remis le 3 février à rendre le 21 février

Toutes les réponses seront justifiées. Une attention particulière est portée sur :
- *la qualité de la rédaction, le soin et la présentation;*
- *la clarté et la précision des raisonnements;*
- ***la recherche et la réflexion personnelle.***

Pré-requis :
- inversion d'une matrice, calcul d'une puissance de matrice ;
- savoir faire le lien entre un calcul matriciel et une suite récurrente ;
- savoir étudier la convergence d'une suite.

Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = PAP^{-1}$ et I la matrice identité de taille 3.

Partie I : Calculs de A^n.

1) A l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, déterminer P^{-1}.
Vérifier le résultat trouvé en calculant $P \times P^{-1}$.

2) Calculer B.

3) Montrer que $B = I - N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4) En déduire B^n.

5) Donner A en fonction de B, puis démontrer que $A^n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & a_n & d_n \\ -2n - n^2 & b_n & e_n \\ \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & c_n & f_n \end{pmatrix}$

(On déterminera a_n, ..., f_n.)

Partie II :

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n \end{cases}$$

1) En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ démontrer que $X_{n+1} = AX_n$.

On dit alors que :
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une « suite matricielle géométrique » de raison A et de premier terme X_0.

2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.

3) En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (E_n) : $x^n + x - 1 = 0$ où l'inconnue x est recherchée dans $[0, +\infty[$.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$.

1) Résoudre (E_1) et (E_2).

2) Étudier les variations de la fonction g_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = x^n + x - 1.$$

3) En déduire que (E_n) admet une unique racine positive x_n et que $0 < x_n < 1$.

4) Déterminer le domaine de définition D_f de f et les limites de f aux bornes de D_f.

5) Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variation de f.

6) Montrer que $f(x_n) = n$.

7) Montrer que (x_n) converge vers un réel ℓ.

8) Déterminer ℓ.

Habituez vous à encadrer vos résultats pour être lu et vous relire facilement !

Fin de l'énoncé