Correction du DM n° 6

Exercice 1

1) On trouve à l'aide de l'algorithme de Jordan-Gauss $P^{-1} = P$ et on vérifie que $P \times P^{-1} = I$.

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) On a de suite : $B = I - N$.

$N^0 = I$

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \geq 3, N^k = 0_3$.

4) — On vérifie que I et N commutent : $I \times N = N \times I = N$.
Donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

— $B^0 = I$

$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} B^n &= (I - N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-N)^k I^{n-k} \text{ avec } I^{n-k} = I \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-N)^k \\ &= \binom{n}{0} I - \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + 0_3 \\ &= I - nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5) — $B = PAP^{-1} \iff P^{-1}BP = A$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} A^n &= (P^{-1}BP)^n \\ &= P^{-1}BP \times P^{-1}BP \times \cdots \times P^{-1}BP \\ &= P^{-1}B \times B \times \cdots \times BP \\ &= P^{-1}B^nP \end{aligned}$$

— Par calcul du produit ci-dessus :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\ -2n - n^2 & 1 - n^2 & 2n - n^2 \\ \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & 1 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \end{pmatrix}$$

Partie II :

1) $A \times X_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n + v_n \\ -3u_n + w_n \\ u_n \end{pmatrix}$

Donc : $A \times X_n = X_{n+1}$.

2) Il s'agit d'une simple récurrence ...

3) Avec ci-dessus : $X_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\ -2n - n^2 & 1 - n^2 & 2n - n^2 \\ \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & 1 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X_n = \begin{pmatrix} 2+\frac{5}{2}n+\frac{3}{2}n^2 \\ -2n-3n^2 \\ 1-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}n^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1) $(E_1) : 2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$.

$(E_2) : x^2+x-1=0 \iff x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin [0,+\infty[, x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2) Pour tout $x \geq 0, g_n(x) = nx^{n-1}+1>0$, donc g_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

3) g_n est continue et strictement monotone sur $[0,1]$, et vérifie $g_n(0)\times g_n(1)<0$. On en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'existence d'un unique réel $x_n \in [0,1]$ (puisque g_n est bijective sur $[0,1]$) vérifiant $g_n(x_n)=0$. Plus précisément, $x_n \in]0,1[$ car $g_n(0)\neq 0$ et $g_n(1)\neq 0$ donc $x_n \neq 0$ et $x_n \neq 1$

4) $x \in D_f \iff 1-x>0$ et $x>0 \iff D_f =]0,1[$.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x)=0^-$.

5) Pour tout $x\in D_f$, $f'(x)=\dfrac{(1-x)\ln(1-x)+x\ln(x)}{x(x-1)\ln^2(x)}$, le dénominateur est manifestement négatif.

Étudions maintenant le signe du numérateur. Posons $g(x)=(1-x)\ln(1-x)+x\ln(x)$, on obtient $g'(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.
Pour tout $x\in]0,1[$, on a $g'(x)\geq 0 \iff \dfrac{x}{1-x}\geq 1 \iff x\in [1/2,1[$.

x	0	$1/2$	1
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	0 ↘	$-\ln 2$	↗ 0

.

On conclut que pour tout $x\in]0,1[$, $g(x)\leq 0$ et par suite $f'(x)\geq 0$. On obtient ainsi :

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

6) On sait que x_n est solution de (E_n), alors il vérifie $x_n^n+x_n-1=0$, d'où $f(x_n)=\dfrac{\ln(1-x_n)}{\ln(x_n)}=\dfrac{\ln(x_n^n)}{\ln(x_n)}=n$.

7) On a d'après ce qui précède $f(x_{n+1})=n+1$, on en déduit que $f(x_n)\leq f(x_{n+1})$ et comme f est croissante sur $]0,1[$, alors $x_n \leq x_{n+1}$. On conclut que la suite (x_n) est croissante, mais par construction pour tout entier naturel $n, x_n\in]0,1[$, il en découle que la suite est majorée par 1.
Au final, la suite (x_n) est convergente. Notons ℓ sa limite, on a donc $1/2\leq \ell \leq 1$ car la suite (x_n) est majorée par 1 et croissante dont le premier terme est $x_1=1/2$ voir la question **1)**.

8) Supposons que $\ell<1$, on peut écrire $x_n^n+x_n-1=\mathrm{e}^{n\ln(x_n)}+x_n-1$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on a $\mathrm{e}^{n\ln(x_n)}\longrightarrow 0$ car $\lim n\ln(x_n)=-\infty$ et par suite $\underbrace{x_n^n+x_n-1}_{=0}\longrightarrow \ell-1\neq 0$ ce qui est absurde.

On conclut donc que $\ell=1$.

Fin du corrigé