$\star$ Sup PTSI B - Icam Toulouse $\star$

DM n° 4

Remis le 10 novembre à rendre le 22 novembre

Toutes les réponses seront justifiées. Une attention particulière est portée sur :
- *la qualité de la rédaction, le soin et la présentation;*
- *la clarté et la précision des raisonnements;*
- ***la recherche et la réflexion personnelle.***

Pré-requis :
- savoir les propriétés de la fonction logarithme et de la fonction arctangente ;
- savoir calculer des dérivées usuelles ;
- savoir trouver une équation de la tangente.

Exercice 1

On considère la fonction :

$$f : x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un r.o.n.d.
On veut faire l'étude complète de f.

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2+1} > -x$

2) Déterminer le domaine de définition de f, on le notera D_f.

3) Démontrer que f est impaire (on pourra calculer $f(x)+f(-x)$).

4) Déterminer le domaine de dérivabilité de f, on le notera $D_{f'}$.

5) Calculer l'expression de la dérivée de f, puis prouver que :

$$\forall x \in D_{f'},\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

6) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

7) Dresser le tableau de variations de f.

8) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

9) On pose $g(x) = \ln(2x)$. Prouver que :

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

10) Dans le même repère tracer les courbes représentatives de ln, de g, et enfin $\mathcal{C}_f$.

11) Démontrer que :

$$\forall x \in D_f, f\left(\mathrm{sh}(x)\right) = x \text{ et } \mathrm{sh}\left(f(x)\right) = x$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 2

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2-1)\arctan\frac{1}{2x-1},$$

et on appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?

2) Exprimer, sur $\mathcal{D}\setminus\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g.

4) Dresser le tableau de variation de f.

Habituez vous à encadrer vos résultats pour être lu et vous relire facilement !

Fin de l'énoncé