Correction du DM n° 3

Exercice 1

— 1^{er} cas : $x = 0[\pi]$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $2(k+1)x \equiv 0[2\pi]$, d'où :
$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(k+1)x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \quad \text{avec } \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(k+1)x} = 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \\ &= (n+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \end{aligned}$$

Donc : $\begin{cases} S = n+1 & \text{si } x = 0[2\pi] \\ S = -n-1 & \text{si } x = \pi[2\pi] \end{cases}$

— $2^{\text{ème}}$ cas : $x \neq 0[\pi]$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{R}e(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+3)x}) \\ &= \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+3)x}\right) \\ &= \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kx}\right) \\ &= \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\right)^k\right) \text{ somme des termes d'une suite géométrique de raison } \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} \neq 1\text{, d'où :} \\ &= \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} \times \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}}\right) \text{ on utilise la technique de l'arc moitié :} \\ &= \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3x+(n+1)x-x)} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right) \text{ puis les formules d'Euler :} \\ &= \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+3)x} \times \frac{2\mathrm{i}\sin(-(n+1)x)}{2\mathrm{i}\sin(-x)}\right) \\ &= \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+3)x}\right) \\ &= \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\cos((n+3)x) \end{aligned}$$

Exercice 2

1) Les solutions de l'équation $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$ sont : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$.
On en déduit que les solutions de $z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0$ vérifient $z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ ou $z^n = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$.
Ainsi l'ensemble des solutions est :
$$\mathcal{S} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0,1,\cdots,n-1\}\right\}.$$

Soit
$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1.$$

a) Connaissant les $2n$ racines du polynôme $P_\alpha(z)$ qui est de degré $2n$, on en déduit que :
$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)\left(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$

Or :
$$\begin{aligned} \left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)\left(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) &= z^2 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \\ &= z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + 1; \end{aligned}$$

d'où la factorisation de P_α :
$$\begin{aligned} P_\alpha(z) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right) \\ &= \left(z^2-2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)+1\right)\left(z^2-2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)z+1\right)\dots\left(z^2-2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+1\right). \end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
1-\cos\theta &= \mathrm{Re}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(-2\mathrm{i}\sin(\theta/2)\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\left(\cos(\theta/2)+\mathrm{i}\sin(\theta/2)\right)\times\left(-2\mathrm{i}\sin(\theta/2)\right)\right)\\
&= 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

c) On a $P_\alpha(1) = 1^{2n} - 2\cos(\alpha)\times 1^n + 1 = 2(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, d'autre part :

$$\begin{aligned}
P_\alpha(1) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(1^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(2\left(1-\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)\\
&= 2^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) = 2^n\prod_{k=0}^{n-1}2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\\
&= 4^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\\
&= 4^n\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)\dots\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)\dots\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

2) Pour tout α appartenant à $]0,\pi[$, et pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

a) Pour tout $\alpha\in]0,\pi[$, $\sin(\alpha/2)>0$ et $\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)>0$ car $\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\in]0,\pi[$ pour $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$.
On en déduit d'après l'identité trouvé dans la précédente question :

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}.$$

b) Sachant que $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0}H_n(\alpha) &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha/2)}{2^{n-1}\sin(\alpha/2n)} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2}\times\frac{\alpha/2n}{\sin(\alpha/2n)}\times\frac{n}{2^{n-1}}\\
&= \frac{n}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

c) En faisant tendre α vers 0 dans $H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$, on en déduit que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Fin du corrigé