

Toutes les réponses seront justifiées. Une attention particulière est portée sur :

- la qualité de la rédaction, le soin et la présentation;
- la clarté et la précision des raisonnements;
- la recherche et la réflexion personnelle.

Pré-requis :

- savoir les définitions du langage ensembliste ;
- savoir traduire une phrase quantifiée en langage courant et inversement ;
- résoudre une inéquation ou une équation dans \mathbb{R} ;
- savoir manipuler la formule du binôme de Newton.

Exercice 1

- 1) Exprimer les assertions suivantes en langage courant. Dire si elles sont vraies ou fausses (justifier), dans le cas d'une assertion fausse, on écrira sa négation :
- 1a.** $\forall x \in]-1, 1], \exists y \in]-1, 1], y < x$.
- 1b.** $\forall x, y \in \mathbb{N}, (x < y) \implies (x + 1 \leq y)$ et si on remplace \mathbb{N} par \mathbb{R} ?
- 2) Exprimer les assertions suivantes en langage mathématique et les justifier :
- 2a.** La fonction inverse n'est pas minorée sur $] - 1; 0[$.
- 2b.** La fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est π -périodique.

Exercice 2

- 1) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Démontrer les assertions suivantes :
- 1a.** $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \iff A \cap B = A \cap C$;
- 1b.**
$$\begin{cases} A \setminus B = A \setminus C \\ B \setminus A = C \setminus A \end{cases} \implies B = C$$
 ;
- 1c.** $A \Delta B = \overline{A \Delta \overline{B}}$;
- 1d.** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
- 2) On considère l'application $f : [1; +\infty[\rightarrow [-2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 2x - 1$
- 2a.** Soit $y \in [-2; +\infty[$. Déterminer tous les antécédents de y par f .
- 2b.** En déduire que f est bijective, et déterminer f^{-1} .

Exercice 3

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} :
- 1a.** $\sqrt{x+2} \geq 1 - x$ **1b.** $|1 - x| \leq 2|x| - 3$ **1c.** $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a$ ($a \in \mathbb{R}$)
- 2) Calculer $A = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k-1} 2^{k+n}$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} 2^k$.

Habituez vous à encadrer vos résultats pour être lu et vous relire facilement !