# Corrigé du devoir à la maison n°1

## Exercice n°1 :

**1.** Équation (1) : $x^4 - 2x^2 - 6 = 0$
Domaine d'étude : $\mathbf{R}$ , pour $x \in \mathbf{R}$ :
$$(1) \iff \begin{cases} X^2 - 2X - 6 = 0 \\ X = x^2 \geq 0 \end{cases}$$
Le discriminant associé à $X^2 - 2X - 6$ est : $\Delta = 28 > 0$
Il y a deux solutions à l'équation $X^2 - 2X - 6 = 0$ : $X_1 = \dfrac{2+\sqrt{28}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{2-\sqrt{28}}{2}$
En simplifiant : $X_1 = 1 + \sqrt{7}$ et $X_2 = 1 - \sqrt{7} < 0$, d'où :
$$\begin{aligned} (1) &\iff \begin{cases} X = 1 + \sqrt{7} \text{ ou } X = 1 - \sqrt{7} < 0 \\ X = x^2 \end{cases} \\ &\iff x = \sqrt{1+\sqrt{7}} \text{ ou } x = -\sqrt{1+\sqrt{7}} \text{ car l'autre solution ne convient pas} \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{1+\sqrt{7}}, -\sqrt{1+\sqrt{7}}\right\}}$

**2.** Équation (2) : $\dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{5}{x-1} = 0$
L'équation a un sens lorsque $x - 1 \neq 0$.
Domaine d'étude : $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ , pour $x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$ on multiplie par $(x-1)^2$ les deux membres :
$$\begin{aligned} (2) &\iff 2 + 5(x-1) = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$
$\boxed{\text{La solution est } \frac{3}{5}}$

**3.** Équation (3) : $6\mathrm{e}^{-x} - 5 = \mathrm{e}^x$
Domaine d'étude : $\mathbf{R}$ , pour $x \in \mathbf{R}$ :
$$\begin{aligned} (3) &\iff 6 - 5\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^x - 6 = 0 \\ &\iff \begin{cases} X^2 + 5X - 6 = 0 \\ X = \mathrm{e}^x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$
Le discriminant associé à $X^2 + 5X - 6$ est : $\Delta = 49 > 0$
Il y a deux solutions à l'équation $X^2 + 5X - 6 = 0$ : $X_1 = \dfrac{-5+\sqrt{49}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-5-\sqrt{49}}{2}$
En simplifiant : $X_1 = 1$ et $X_2 = -6$, d'où :
$$\begin{aligned} (3) &\iff \begin{cases} X = 1 \text{ ou } X = -6 \\ X = \mathrm{e}^x \end{cases} \\ &\iff \mathrm{e}^x = 1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = -6 && \text{avec } \mathrm{e}^x > 0 \\ &\iff \mathrm{e}^x = 1 && \text{or exp réalise une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$
$\boxed{\text{La solution est } 0}$

**4.** Équation (4) : $4x + 6\sqrt{x} - 18 = 0$
L'application $\sqrt{\ }$ est définie sur $\mathbf{R}_+$.
Domaine d'étude : $\mathbf{R}_+$ , pour $x \in \mathbf{R}_+$ :
$$\begin{aligned} (4) &\iff \begin{cases} 4X^2 + 6X - 18 = 0 \\ X = \sqrt{x} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2X^2 + 3X - 9 = 0 \\ X = \sqrt{x} \end{cases} \end{aligned}$$
Le discriminant associé à $2X^2 + 3X - 9$ est : $\Delta = 81 > 0$

Il y a deux solutions à l'équation $2X^2 + 3X - 9 = 0$ : $X_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{81}}{2 \times 2}$ et $X_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{81}}{2 \times 2}$

En simplifiant : $X_1 = \dfrac{3}{2}$ et $X_2 = -3$, d'où :

$$\begin{aligned}
(4) \quad &\iff \quad \begin{cases} X = \dfrac{3}{2} \text{ ou } X = -3 \\ X = \sqrt{x} \end{cases} \\
&\iff \quad \sqrt{x} = \frac{3}{2} \text{ ou } \sqrt{x} = -3 && \text{avec } \sqrt{x} \geqslant 0 \\
&\iff \quad \sqrt{x} = \frac{3}{2} && \text{or } \sqrt{\ } \text{ réalise une bijection de } \mathbf{R}_+ \text{ sur } \mathbf{R}_+ \\
&\iff \quad x = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La solution est } \frac{9}{4}}$

**5.** Équation (5) : $\sqrt{x+7} = 5$

L'application $\sqrt{\ }$ est définie sur $\mathbf{R}_+$, l'équation a un sens lorsque $x + 7 \geqslant 0$ c'est à dire $x \geqslant -7$.

Domaine d'étude : $[-7; +\infty[$ , pour $x \in [-7; +\infty[$ :

$$\begin{aligned}
(5) \quad &\implies \quad x + 7 = 25 \\
&\implies \quad x = 18
\end{aligned}$$

Vérification : $\sqrt{18 + 7} = 5$.

$\boxed{\text{La solution est } 18}$

**Attention ici au raisonnement, on n'a pas l'équivalence car la fonction carrée ne réalise pas une bijection de R sur R$_+$, ainsi l'élévation au carré donne juste une implication « $\implies$ » et non une équivalence « $\iff$ » !**

**6.** Équation (6) : $\sqrt{x+7} = 5 - x$

Domaine d'étude : Le réel $x$ doit vérifier $(x + 7) > 0$ soit $x \in [-7; +\infty[$ :

<u>1ère méthode</u> : Démarche par implications.

$$\begin{aligned}
(6) \quad &\implies \quad x + 7 = 25 - 10x + x^2 \\
&\implies \quad x^2 - 11x + 18 = 0
\end{aligned}$$

Après résolution (facile) on trouve 2 solutions **possibles** : $x = 2$ et $x = 9$

Vérification : $\sqrt{2 + 7} = 5 - 2$ mais $\sqrt{9 + 7} \neq 5 - 9$

$\boxed{\text{La seule solution est } 2}$

<u>2ème méthode</u> : Démarche par équivalences

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+7} = 5 - x \quad &\iff \quad x + 7 = 25 - 10x + x^2 \ \text{ et } \ (5 - x) \geq 0 \\
&\iff \quad x^2 - 11x + 18 = 0 \ \text{ et } \ x \leq 5 \\
&\iff \quad (x = 2 \ \text{ ou } \ x = 9) \ \text{ et } \ x \leq 5 \\
&\iff \quad x = 2.
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\text{la solution est } 2}$

## Exercice n°2 :

**1.** Équation (1) : $\ln(x + 2) + \ln(x - 2) = \ln(2x + 11)$

L'application ln est définie sur $\mathbf{R}_+^*$, l'équation a un sens lorsque : $x + 2 > 0$ c'est à dire $x > -2$, et $x - 2 > 0$ c.à.d. $x > 2$, et $2x + 11 > 0$ c.à.d. $x > -\frac{11}{2}$.

Domaine d'étude : $]2; +\infty[$ , pour $x \in ]2; +\infty[$ :

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad \ln((x - 2)(x + 2)) = \ln(2x + 11) \\
&\iff \quad (x - 2)(x + 2) = 2x + 11 && \text{car } \ln \text{ réalise une bijection de } \mathbf{R}_+^* \text{ sur } \mathbf{R} \\
&\iff \quad x^2 - 2x - 15 = 0
\end{aligned}$$

On résout l'équation du second degré, on fait attention à l'intervalle d'étude (!).

On conclut : $\boxed{\text{la seule solution est } 5}$

**2.** Équation (2) : $\ln((x + 2)(x - 2)) = \ln(2x + 11)$

L'application ln est définie sur $\mathbf{R}_+^*$, l'équation a un sens lorsque : $(x+2)(x-2) > 0$ c'est à dire $x > 2$ ou $x < -2$, et $2x + 11 > 0$ c.à.d. $x > -\frac{11}{2}$.
Domaine d'étude : $D = \left]-\frac{11}{2}; -2\right[ \cup ]2; +\infty[$
Remarque : *Cette équation n'a pas le même domaine de définition que la précédente équation, donc on est en présence d'une équation différente de la précédente .*
Pour $x \in D$

$$\begin{aligned}(2) &\iff (x-2)(x+2) = 2x + 11 \quad \text{car ln réalise une bijection de } \mathbf{R}_+^* \text{ sur } \mathbf{R}\\ &\iff x^2 - 2x - 15 = 0\end{aligned}$$

On résout l'équation du second degré, on fait attention à l'intervalle d'étude (!).
On conclut : $\boxed{\text{les solutions sont 5 et } -3}$

## Exercice n°3 :

**1.** 1) Inéquation (1) : $x^2 - 2x + 3 > 0$
Le domaine d'étude est $\mathbf{R}$.
Le discriminant associé à $x^2 - 2x + 3$ est : $\Delta = -8 < 0$
Le trinôme $x^2 - 2x + 3$ est de signe constant, du signe du coefficient devant le terme de degré 2, ici strictement positif.
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathbf{R}}$

2) Inéquation (2) : $-x^2 + 8x - 15 \geqslant 0$
Le domaine d'étude est $\mathbf{R}$.
Le discriminant associé à $-x^2 + 8x - 15$ est : $\Delta = 4 > 0$
Il y a deux solutions à l'équation $-x^2 + 8x - 15 = 0$ : $x_1 = 5$ et $x_2 = 3$
Donc : $-x^2 + 8x - 15 = -(x-5)(x-3)$ (attention au coefficient devant le terme de degré 2).
L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = [3; 5]}$

3) Inéquation (3) : $4x^2 + 12x + 9 \leqslant 0$
Le domaine d'étude est $\mathbf{R}$.
Or : $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$, avec : $(2x+3)^2 > 0$ pour $x \neq -\dfrac{3}{2}$ et $(2x+3)^2 = 0$ pour $x = -\dfrac{3}{2}$.
$\boxed{\text{La solution est : } -\dfrac{3}{2}}$

4) Inéquation (4) : $x^4 - 2x^2 - 6 \leqslant 0$
Le domaine d'étude est $\mathbf{R}$.
D'après l'ex.1 on a : $x^4 - 2x^2 - 6 = \left(x^2 - (1 - \sqrt{7})\right)\left(x - \sqrt{1+\sqrt{7}}\right)\left(x + \sqrt{1+\sqrt{7}}\right)$
On en déduit le signe avec le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{1+\sqrt{7}}$ | | $\sqrt{1+\sqrt{7}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-(1-\sqrt{7})$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-\sqrt{1+\sqrt{7}}$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+\sqrt{1+\sqrt{7}}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^4-2x^2-6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left[-\sqrt{1+\sqrt{7}}; \sqrt{1+\sqrt{7}}\right]}$

5) Inéquation (5) : $25 \leqslant (x-2)^2 \leqslant 36$
Le domaine d'étude est $\mathbf{R}$.
Résolvons chacune des deux inéquations : $25 \leqslant (x-2)^2$ et $(x-2)^2 \leqslant 36$

- $$\begin{aligned}25 \leqslant (x-2)^2 &\iff 0 \leqslant (x-2)^2 - 5^2\\ &\iff 0 \leqslant (x-7)(x+3)\\ &\iff x \in ]-\infty; -3] \cup [7; +\infty[\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(x-2)^2 \leqslant 36 &\iff (x-2)^2 - 36 \leqslant 0\\ &\iff (x-8)(x+4) \leqslant 0\\ &\iff x \in [-4;8]\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-4;8] \cap (]-\infty;-3] \cup [7;+\infty[)$, soit :

$$\boxed{\mathcal{S} = [-4;-3] \cup [7;8]}$$

6) Inéquation (6) : $\dfrac{(3x+1)^2}{3x-5} > 1$

Le domaine d'étude est $\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$, pour $x \neq \dfrac{5}{3}$ :

$$\begin{aligned}(6) &\iff \frac{(3x+1)^2}{3x-5} - 1 > 0\\ &\iff \frac{(3x+1)^2 - 3x + 5}{3x-5} > 0\\ &\iff \frac{9x^2+3x+6}{3x-5} > 0\end{aligned}$$

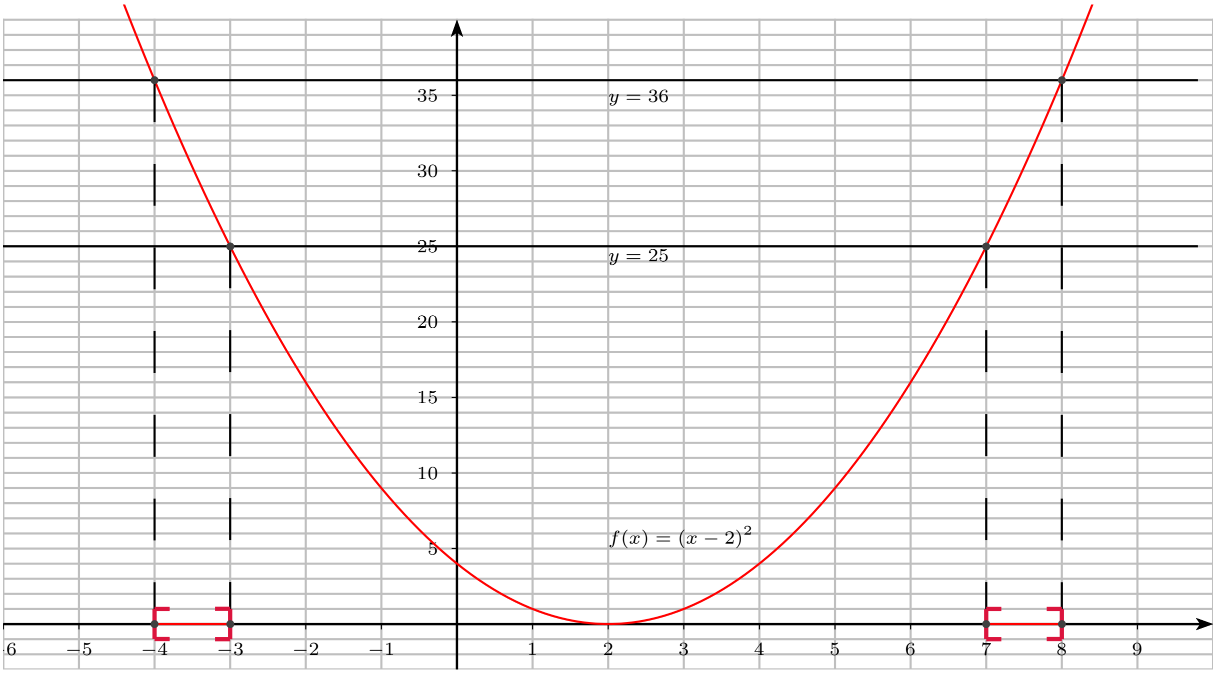
Le numérateur a un discriminant négatif, il est de signe constant, celui de 9, c'est à dire strictement positif.

Le signe du quotient est celui de $3x-5$ d'où :

l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[}$

**Si vous résolvez l'équation en multipliant les deux membres de l'inégalité par $3x-5$ : attention au signe ! Il faut distinguer deux cas.**

**2.** Vérification graphique avec la courbe représentative de l'application définie sur $\mathbf{R}$ par $x \longmapsto (x-2)^2$.




**3.** Pour que l'inégalité soit vraie pour tout réel $x$, il faut et il suffit que $\Delta \leqslant 0$ et $m+3>0$ soit :

$$\Delta = -7m^2 - 70m - 47 \leqslant 0 \quad \textbf{et} \quad m > -3.$$

Le discriminant de $\Delta$ est $\Delta_0 = \left(16\sqrt{47}\right)^2$, dont il admet deux racines :

$$m_1 = -\frac{35+8\sqrt{14}}{7}, \quad m_2 = -\frac{35-8\sqrt{14}}{7}.$$

Comme $\Delta$ doit être négatif, alors $m$ est à l'extérieur des racines $m_1$ et $m_2$ ; de plus, $m > -3$. En résumé :

$$\boxed{m \in [m_2, +\infty[}$$

car $m_1 < -3 < m_2$.