

TD 6 : Dérivées - Fonctions usuelles

Exercice 1 Résolution d'équations

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1/ $\cos(x) = \sqrt{3} \sin(x)$.

3/ $\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{kx} = 0$.

5/ $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$,

2/ $(x)^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

4/ $\operatorname{ch} x = 2$,

6/ $2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 2 Dérivées

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1/ $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$;

5/ $j(x) = \operatorname{Arc} \tan(\sin 3x)$;

2/ $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

6/ $k(x) = \ln \left(2 + \sin^2(e^{x^2}) \right)$;

3/ $h(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$;

7/ $l(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$;

4/ $i(x) = \frac{1}{\cos \sqrt{x}}$;

8/ $m(x) = \arctan \left(\sqrt{1+x^2} - x \right)$.

Exercice 3 Fonction circulaire réciproque

Soit $f : x \mapsto \arcsin \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right) - \arcsin \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)$. Calculer f' . En déduire l'expression de f .

Exercice 4 Fonction hyperbolique

Simplifier l'expression de $f(x) = \ln \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}}$.

Exercice 5 Fonction arctan

Soit $f(x) = \arctan(e^x)$

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f , puis l'ensemble de dérivabilité de f .

2/ Calculer f' , puis déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 6 Somme et produit

Calculer :

1/ $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2^k} \right)$ où $n \in \mathbb{N}$.

2/ $S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a + kb)$ et $C_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + kb)$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Dérivée $n^{\text{ième}}$

Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto f(x)$ dans les cas suivants :

1/ $f(x) = x^{n+1}$;

3/ $f(x) = \cos 3x$;

5/ $f(x) = \ln x$;

2/ $f(x) = x^{2n}$;

4/ $f(x) = \sin^2 x$;

6/ $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Exercice 8 **Dérivabilité**

Déterminer les domaines de dérivabilité puis les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

1/ $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$

2/ $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

4/ $f(x) = \arcsin(1-x^3)$.

3/ $f(x) = |1-x^2|e^x$

5/ $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$.

Exercice 9 **Étude d'une fonction**

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

1/ Déterminer le domaine de définition de f , puis son domaine de dérivabilité.

2/ Déterminer l'expression de la dérivée de f .

3/ En déduire une expression simplifiée de f .

4/ Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 11

Soient les fonctions $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1/ Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.

2/ Construire les graphes de f et g .

Exercice 12

Simplifier les expressions suivantes :

1/ $f_1(x) = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$.

2/ $f_2(x) = \arccos \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$.

3/ $f_3(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2} - \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$.

4/ $f_4(x) = \arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x+1} + \arctan \frac{x-1}{x}$.