

Exercice 1 **Résolution d'équations**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1/ $\cos(x) = \sqrt{3} \sin(x)$.

3/ $\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{kx} = 0$.

5/ $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$,

2/ $(x)^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

4/ $\operatorname{ch} x = 2$,

6/ $2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

Solution:

1. $\tan x = \frac{\pi}{6} \iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

2. Domaine d'étude est $\mathbb{R}_+^*$, $(x)^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff \sqrt{x} \ln(x) - \frac{x}{2} \ln(x) = 0 \iff \begin{cases} \ln(x) = 0 \\ \sqrt{x} - \frac{x}{2} = 0 \end{cases}$.

Donc, $\mathcal{S} = \{1, 4\}$.

3. $\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{kx} = 0 \iff$

4. $\operatorname{ch} x = 2 \iff x = \pm \operatorname{argch} 2 = \pm \ln(2 + \sqrt{2^2 - 1}) = \pm \ln(2 + \sqrt{3})$. Les solutions sont $\ln(2 + \sqrt{3})$ et $-\ln(2 + \sqrt{3})$ (ou encore $\ln(2 - \sqrt{3})$ car $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$).

5. Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Soit donc $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}) \Rightarrow \sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}))$$

$$\iff 2x = x\sqrt{1 - (x\sqrt{2})^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1 - x^2} \iff x = 0 \text{ ou } \sqrt{1 - 2x^2} + \sqrt{2 - 2x^2} = 2$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } 1 - 2x^2 + 2 - 2x^2 + 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} = 4$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} = 1 + 4x^2$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } 4(4x^4 - 6x^2 + 2) = (4x^2 + 1)^2$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \iff x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x , la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leq \frac{16}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ et $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Mais,

$$0 \leq \arcsin \sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \arcsin \sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin \sqrt{\frac{7}{16}} \leq 2 \arcsin \sqrt{\frac{8}{16}} = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\arcsin \sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De même, par parité, $\arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}) + \arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ ce qui achève la résolution.

$$\mathcal{S} = \left\{ 0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8} \right\}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\arcsin x$ existe si et seulement si $x \in [-1, 1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1] \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } (2x^2 - 1)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(2 \arcsin(x)) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus,

$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Par suite,

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 2 \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Exercice 2 Dérivées

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1/ $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$;

2/ $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

3/ $h(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$;

4/ $i(x) = \frac{1}{\cos \sqrt{x}}$;

5/ $j(x) = \operatorname{Arc} \tan(\sin 3x)$;

6/ $k(x) = \ln \left(2 + \sin^2 \left(e^{x^2} \right) \right)$;

7/ $l(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$;

8/ $m(x) = \arctan \left(\sqrt{1+x^2} - x \right)$.

Solution:

.....

Exercice 3 Fonction circulaire réciproque

Soit $f : x \mapsto \arcsin \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right) - \arcsin \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)$. Calculer f' . En déduire l'expression de f .

Exercice 4 **Fonction hyperbolique**

Simplifier l'expression de $f(x) = \ln \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}}$.

Exercice 5 **Fonction arctan**

Soit $f(x) = \arctan(e^x)$

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f , puis l'ensemble de dérivabilité de f .

2/ Calculer f' , puis déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 6 **Somme et produit**

Calculer :

1/ $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ où $n \in \mathbb{N}$.

2/ $S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a + kb)$ et $C_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + kb)$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 **Dérivée $n^{\text{ième}}$**

Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto f(x)$ dans les cas suivants :

1/ $f(x) = x^{n+1}$;

4/ $f(x) = \sin^2 x$;

6/ $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

2/ $f(x) = x^{2n}$;

3/ $f(x) = \cos 3x$;

5/ $f(x) = \ln x$;

Solution:

.....

Exercice 8 **Dérivabilité**

Déterminer les domaines de dérivabilité puis les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

1/ $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

2/ $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

4/ $f(x) = \arcsin(1-x^3)$.

3/ $f(x) = |1-x^2|e^x$

5/ $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$.

Exercice 9 **Étude d'une fonction**

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

1/ Déterminer le domaine de définition de f , puis son domaine de dérivabilité.

2/ Déterminer l'expression de la dérivée de f .

3/ En déduire une expression simplifiée de f .

4/ Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 11

Soient les fonctions $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1/ Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.

2/ Construire les graphes de f et g .

Solution:**Exercice 12**

Simplifier les expressions suivantes :

$$1/ f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

$$2/ f_2(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

$$3/ f_3(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2} - \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right).$$

$$4/ f_4(x) = \arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x+1} + \arctan \frac{x-1}{x}.$$

Solution:

1/ 1ère solution. Pour tout réel x , $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, et pour tout réel x ,

$$f_1'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}x \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x).$$

Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x , $f_1(x) = \arctan x + C$. $x = 0$ fournit $C = 0$ et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan x.$$

2ème solution. Pour x réel donné, posons $\theta = \arctan x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan \theta$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \sqrt{\cos^2 \theta} \tan \theta = \cos \theta \tan \theta \text{ (car } \cos \theta > 0) \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \arcsin(\sin \theta) = \theta \text{ (car } \theta \text{ est dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) \\ &= \arctan x. \end{aligned}$$

2/ 1ère solution. Pour tout réel x , $-1 < -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq -1 + 2 = 1$ (avec égalité si et seulement si $x = 0$). f_2 est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x . Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x , $f_2(x) = 2 \arctan x + C$ (y compris $x = 0$ puisque f est continue en 0).

$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc, pour tout réel positif x , $f_2(x) = 2 \arctan x$. Par parité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2 \arctan |x|.$$

2ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}$ puis $\theta = \arctan x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan \theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta (1-\tan^2 \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$f_2(x) = \arccos(\cos(2\theta)) = \begin{cases} 2\theta & \text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ -2\theta & \text{si } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right] \end{cases} = \begin{cases} 2 \arctan x & \text{si } x \geq 0 \\ -2 \arctan x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = 2 \arctan |x|.$$

3/ La fonction $x \mapsto \arcsin \sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ car pour x élément de $[-1, 1]$, $1-x^2$ est élément de $[0, 1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0. $\frac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $] -1, 1]$, et nul si et seulement si $x = 1$. f_3 est donc définie et continue sur $] -1, 1]$, dérivable sur $] -1, 0[\cup] 0, 1[$.

Pour x dans $] -1, 0[\cup] 0, 1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $] 0, 1[$, $f_3'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\frac{1}{2} \arcsin)'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $] 0, 1[$ (par continuité) $f_3(x) = -\frac{1}{2} \arcsin x + C$. $x = 1$ fournit $C = \frac{\pi}{4}$. Donc,

$$\forall x \in [0, 1], f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{1}{2} \arccos x.$$

Si x est dans $] -1, 0[$, $f_3'(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{3}{2} \arcsin)'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $] -1, 0[$ (par continuité) $f_3(x) = \frac{3}{2} \arcsin x + C'$. $x = 0$ fournit $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\forall x \in] -1, 0], f_3(x) = \frac{3}{2} \arcsin x + \frac{\pi}{4}.$$

4/ f_4 est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ et pour x élément de $\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{(x-1)^2}{x^2}} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0.
\end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$ et $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour $-1 < x < 0$, $f(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} f(t) = \arctan \frac{1}{2} - (-\frac{\pi}{2}) + \arctan 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Pour $x < -1$, $f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in] -\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ \pi & \text{si } x \in] -1, 0[\end{cases}.$$