Table des matières

6 Dérivations et fonctions usuelles **1**
1 Dérivation . . . 1
1.1 Généralités . . . 1
1.2 Tangente . . . 1
1.3 Opérations . . . 2
1.4 Dérivées successives . . . 3
2 Fonctions logarithmes et exponentielles . . . 3
2.1 Logarithme népérien . . . 3
2.2 Logarithme de base 10 . . . 4
2.3 Exponentielle de base e . . . 4
2.4 Exponentielle de base a . . . 5
3 Fonctions puissances, racines $n^{\text{ièmes}}$ . . . 6
3.1 Fonctions puissances . . . 6
3.2 Fonctions racines $n^{\text{ièmes}}$ . . . 7
3.3 Croissances comparées . . . 7
4 Fonctions hyperboliques . . . 8
4.1 Généralités . . . 8
4.2 Trigonométrie hyperbolique . . . 9
5 Fonctions circulaires . . . 9
5.1 Fonctions sinus, cosinus . . . 9
5.2 Fonction tangente . . . 10
6 Fonctions circulaires réciproques . . . 10
6.1 Fonction Arcsinus . . . 10
6.2 Fonction Arccosinus . . . 11
6.3 Fonction Arctangente . . . 12
7 Tableau des dérivées des fonctions usuelles . . . 13

Chapitre 6

Dérivations et fonctions usuelles

1 Dérivation

1.1 Généralités

Définitions 1.1. *(Rappels.)*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

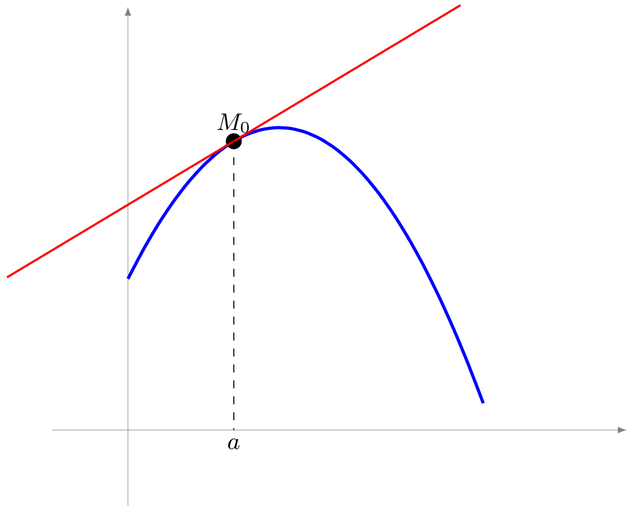
- *On dit que f est dérivable en a lorsque :*
  $$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie.}$$
  Dans ce dernier cas : on l'appelle nombre dérivé de f en a, et on la note $f'(a)$.
- *Lorsque f est dérivable en toute valeur (ou tout point) a de I on définit alors la fonction dérivée de f :*
  $$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$
- *On note l'ensemble des fonctions dérivables sur I : $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$*

Exemple 1.1. *Soit $n \in \mathbf{N}$, montrons que la dérivée de la fonction définie par $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Exemple 1.2. *Montrons que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$.*

1.2 Tangente

Théorème 1.1. *(Équation de la tangente.)*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



1.3 Opérations

Théorème 1.2. *(Opérations sur les fonctions dérivables.)*
Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose que f et g sont dérivables sur I, alors :

(i) *$f+g$ est dérivable sur I et :* $(f+g)' = f' + g'$.
(ii) *λf est dérivable sur I et :* $(\lambda f)' = \lambda f'$
(iii) *fg est dérivable sur I et :* $(fg)' = f'g + g'f$
(iv) *si de plus g ne s'annule pas sur I :*
$\frac{1}{g}$ *est dérivable sur I et :* $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$ *est dérivable sur I et :* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Théorème 1.3. *(Dérivée d'une composée.)*
Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, ***à valeurs dans*** *un intervalle J, et g une fonction définie et dérivable sur J.*
La composée de f par g, $g \circ f$ est dérivable et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f' \quad \text{ou encore} \quad \forall x \in E, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Exemple 1.3.
Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Corollaire.
Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Exercices d'application.

1. *Déterminer la dérivée de la fonction réciproque de* $x \mapsto x^2$.

2. *Même question pour les fonctions* cos, sin *et* tan.

1.4 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f. Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Si la **dérivée** n**-ième** $f^{(n)}$ existe on dit que f est n **fois dérivable**.

2 Fonctions logarithmes et exponentielles

2.1 Logarithme népérien

Définition 2.1.
on appelle logarithme népérien et on note ln *la primitive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *qui s'annule en* 1 *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Propriétés 2.1.

(i) *La fonction* ln *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

(ii) ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.

(iii) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b$.

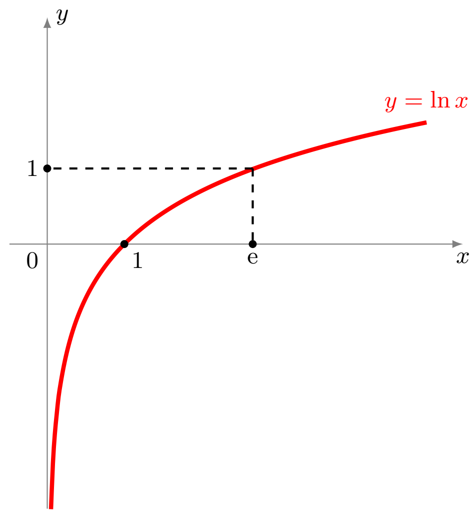
(iv) $\forall x > 0,\ y > 0,\ \ln \dfrac{1}{x} = -\ln x,\ \ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

(v) $\forall n \in \mathbf{Z},\ \ln x^n = n \ln x$.

(vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(vii) *la fonction* ln *est concave et* $\ln x \leq x - 1$ *(pour tout* $x > 0$*).*

(viii) *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I*, ne s'annulant pas sur* I*,* $\ln|u|$ *est dérivable sur* I *et* $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$.



2.2 Logarithme de base 10

Définition 2.2.
*On appelle **logarithme de base 10** et on note* $\log_{10}$ *ou* $\log$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

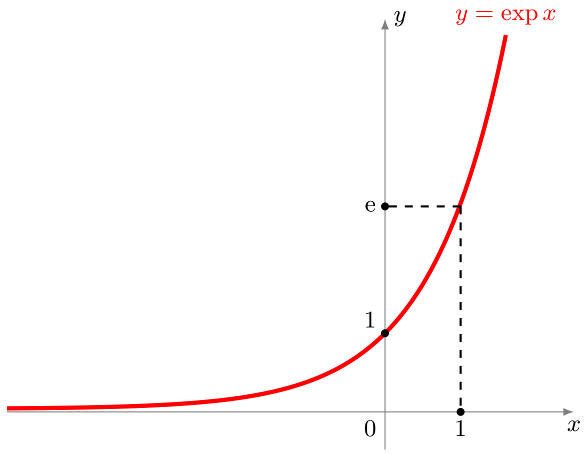
Remarques.

1. *La fonction* $\log$ *possède les mêmes propriétés que celles de* $\ln$.
2. *On a pour tout* $n \in \mathbf{Z},\ \log(10^n) = n$.

2.3 Exponentielle de base e

Définition 2.3.
La fonction $\ln$ *est continue et strictement croissante de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$ *donc établit une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$ *et admet une bijection réciproque définie de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *appelée **fonction exponentielle** et notée* $\exp$ *:*

$$\left\{\begin{array}{l} y = \exp(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ln(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.$$



Propriétés 2.2.

(*i*) *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

(*ii*) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(*iii*) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Remarque.

En notant e le réel exp on obtient pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$ ($\mathrm{e} \cong 2,718$).
Par convention, on note alors : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) = \mathrm{e}^x$.
La fonction exp est appelée **fonction exponentielle de base** e.

Propriétés 2.3.

(*i*) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$ *et* $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$.

(*ii*) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ *et pour tout* $n \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$.

(*iii*) *La fonction* exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \mathrm{e}^x$.

(*iv*) *La fonction* exp *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et elle est convexe ; on a pour tout réel* x, $\exp x \geqslant 1 + x$.

(*v*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

2.4 Exponentielle de base a

Définition 2.4.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. *On appelle* ***exponentielle de base*** a *et on note* $\exp_a$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a(x) = \mathrm{e}^{x \ln a} = a^x.$$

Remarques.

1. *Les propriétés de* $\exp_a$ *se déduisent de celles de* exp , *en particulier :*

   (*a*) *la fonction* $\exp_a$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp_a'(x) = \ln a\, \mathrm{e}^{x \ln a} = \ln a a^x$;

   (*b*) *si* $a > 1$, *alors* $\exp_a$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$;

(c) *si* $0 < a < 1$, *alors* $\exp_a$ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$.

2. *La fonction* $\exp_{10} = 10^x$ *est la bijection réciproque de* $\log_{10}$.
3. *On retrouve les règles usuelles des exposants entiers :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a^{x+y} = a^x a^y,\ etc\ldots$$

3 Fonctions puissances, racines $n^{\text{ièmes}}$

3.1 Fonctions puissances

Définition 3.1.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. *On appelle* ***fonction puissance*** *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}.$$

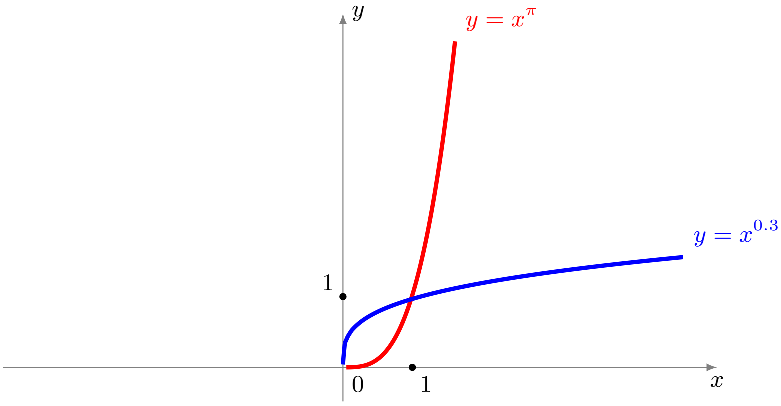
Propriétés 3.1.
La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

(i) *pour* $\alpha > 0$, f_α *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$;
(ii) *pour* $\alpha = 0$, f_α *est constante sur* $\mathbb{R}_+^*$;
(iii) *pour* $\alpha < 0$, f_α *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques.

1. *Pour* $\alpha > 0$, f_α *peut être prolongée par continuité en* 0 *en posant* $f_\alpha(0) = 0$.
2. *Si* $\alpha \in \mathbf{N}$, *alors* f_α *est définie sur* $\mathbb{R}$ *(si* $\alpha \in \mathbf{Z}^-$ *alors* f_α *est définie sur* $\mathbb{R}^*$ *).*
3. *On retrouve les propriétés classiques des puissances :*
   Soit $x, y > 0$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) $x^{a+b} = x^a x^b$
   (b) $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$
   (c) $(xy)^a = x^a y^a$
   (d) $(x^a)^b = x^{ab}$
   (e) $\ln(x^a) = a \ln x$

Exemple 3.1. *courbes représentatives de* $x \mapsto x^\pi$ *et* $x \mapsto x^{0.3}$:



3.2 Fonctions racines $n^{\text{ièmes}}$

Définition 3.2 (Racine $n^{\text{ième}}$).
Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n$ établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et admet donc une bijection réciproque appelée ***fonction racine*** *$n^{\text{ième}}$ notée $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ définie de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$:*

$$\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Remarque. pour n impair $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

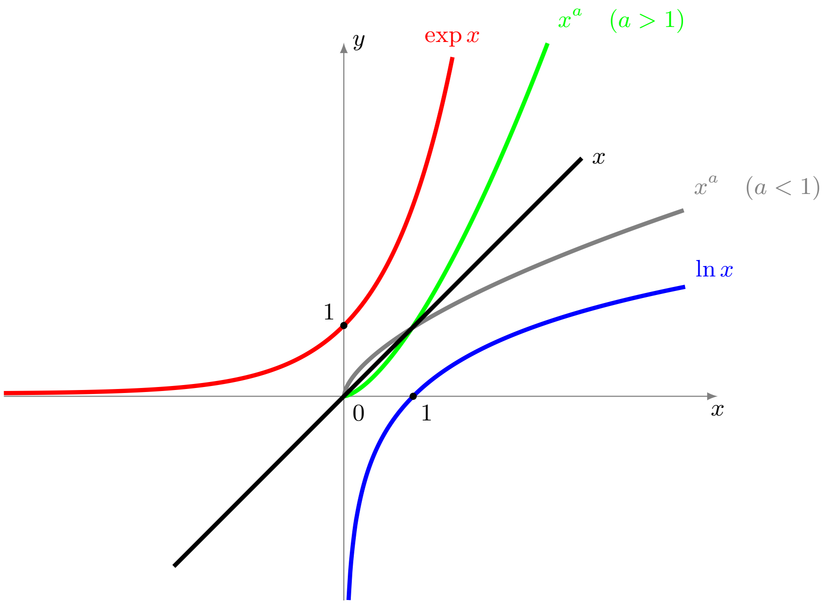
3.3 Croissances comparées

Théorème 3.1.
On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

on en déduit :

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0;\ \lim_{x \to 0} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty;\ \lim_{x \to +\infty} x^\beta \,\mathrm{e}^{-\alpha x} = 0.$$



4 Fonctions hyperboliques

4.1 Généralités

Définitions 4.1.

(i) *On appelle fonction* ***sinus hyperbolique*** *l'application de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *notée* sh *telle que pour tout réel* x, $\operatorname{sh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

(ii) *On appelle fonction* ***cosinus hyperbolique*** *l'application de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *notée* ch *telle que pour tout réel* x, $\operatorname{ch} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Remarque. Pour tout réel x, on a $\operatorname{sh}(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sin x$ et $\operatorname{ch}(\mathrm{i}x) = \cos x$.

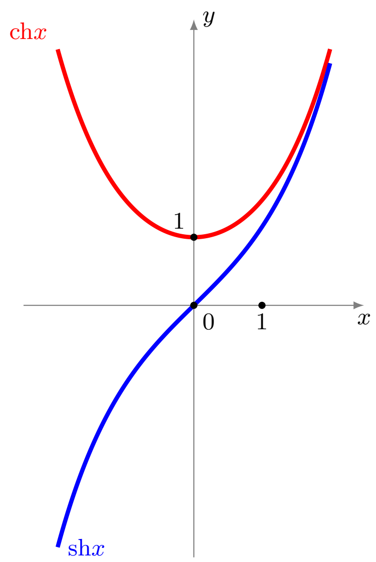
Propriétés 4.1.
Les fonctions sh *et* ch *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}; \quad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}.$$

Remarques.

1. *La fonction* sh *est impaire et* ch *est paire*
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x > 0;\ \operatorname{sh}(0) = 0;\ \operatorname{ch}(0) = 1;\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = \operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1.$

Représentations graphiques de sh **et** ch :



4.2 Trigonométrie hyperbolique

Propriétés 4.2.

(i) *pour tout réel x :*

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x; \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{-x}.$$

(ii) *Pour tout réel x, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.*

(iii) *Pour tous réels a, b, on a :*

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{ch}(a+b) & = & \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\
\operatorname{ch}(a-b) & = & \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\
\operatorname{sh}(a+b) & = & \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \\
\operatorname{sh}(a-b) & = & \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \\
\operatorname{ch} 2a & = & \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a \\
\operatorname{sh} 2a & = & 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a.
\end{array}$$

5 Fonctions circulaires

5.1 Fonctions sinus, cosinus

Définition 5.1 (Rappel)**.**
Soient $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan orienté usuel et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Soient M un point de $\mathcal{C}$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $x = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ en radians.
*On appelle **cosinus** du réel x l'abscisse de M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et **sinus** de ce réel l'ordonnée de M.*
On définit ainsi deux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ notées $\cos$ et $\sin$.

Propriétés 5.1.

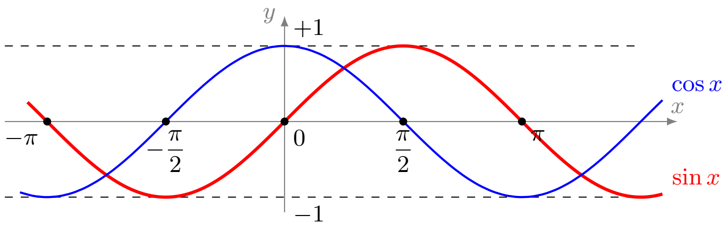
(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(ii) *Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.*

(iii) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\sin'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad \cos'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

(iv) *La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.*



5.2 Fonction tangente

Définition 5.2.
*La fonction **tangente** est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \right\}$ *par* $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

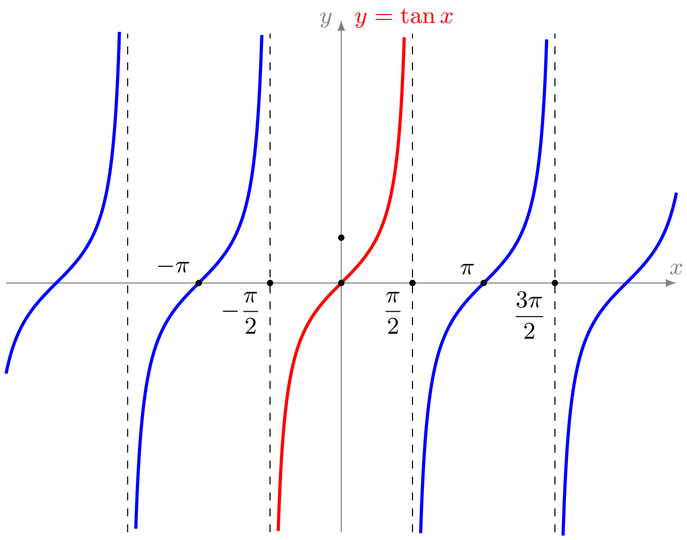
Propriétés 5.2.

(i) *La fonction* $\tan$ *est impaire et* π*-périodique.*

(ii) $\tan$ *est continue et dérivable sur tout intervalle où elle est définie.*

(iii) *Pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \right\}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Représentation graphique :



6 Fonctions circulaires réciproques

6.1 Fonction Arcsinus

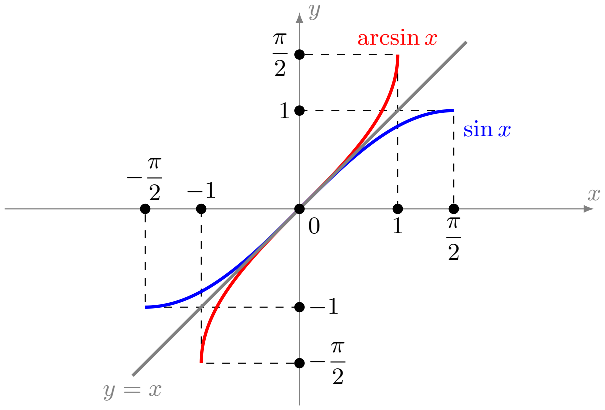
Définition 6.1.
*La fonction **sinus** est continue et strictement croissante de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *sur* $[-1, 1]$.
Elle admet donc une bijection réciproque de $[-1, 1]$ *sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *continue et strictement croissante appelée **arcsinus** et notée* $\arcsin$ *:*

$$\begin{cases} y = \arcsin\ x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin\ y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Remarques.

1. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \arcsin(\sin x) = x$ *et* $\forall x \in [-1.1],\ \sin(\arcsin x) = x$.
2. *La fonction* $\arcsin$ *est impaire.*
3. $\forall x \in [-1.1],\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Courbes représentatives de $\arcsin$ **et** $\sin$ **sur** $[-\pi/2, \pi/2]$**.**



> **Propriétés 6.1.**
> *la fonction arcsinus est dérivable sur* $]-1,1[$ *et :*
> $$\forall x \in]-1,1[,\ (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

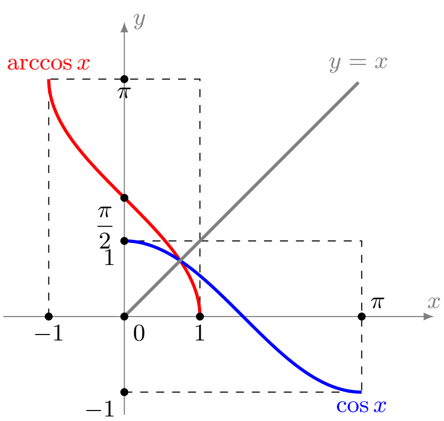
6.2 Fonction Arccosinus

> **Définition 6.2.**
> *La fonction* ***cosinus*** *est continue et strictement décroissante de* $[0,\pi]$ *sur* $[-1,1]$.
> *Elle admet donc une bijection réciproque de* $[-1,1]$ *sur* $[0,\pi]$ *continue et strictement décroissante appelée* ***arccosinus*** *et notée* $\arccos$ *:*
> $$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \arccos x \\ x \in & & [-1,1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \cos y \\ y \in & & [0,\pi] \end{array}\right.$$

Remarques.

1. $\forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos x) = x$ *et* $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos x) = x$.
2. *La fonction* $\arccos$ *n'est ni paire, ni impaire.*
3. $\forall x \in [-1,1],\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

Courbes représentatives de $\arccos$ **et** $\cos$ **sur** $[0,\pi]$**.**



Propriétés 6.2.

(*i*) *la fonction arccosinus est dérivable sur* $]-1,1[$ *et :*

$$\forall x \in]-1,1[, \ (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(*ii*) $\forall x \in [-1,1], \ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

6.3 Fonction Arctangente

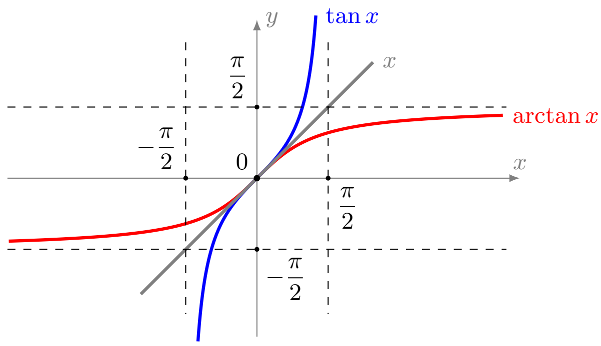
Définition 6.3.
La fonction ***tangente*** *est continue et strictement croissante de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$.
Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *continue et strictement croissante appelée* ***arctangente*** *et notée* arctan *:*

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array} \right.$$

Remarques.

1. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \arctan(\tan x) = x$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}, \ \tan(\arctan x) = x$.
2. *La fonction* arctan *est impaire.*

Courbes représentatives de arctan **et** tan **sur** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$**.**



Propriétés 6.3.

(*i*) *la fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(*ii*) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \textit{si} \ \ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{si} \ \ x < 0. \end{cases}$

7 Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître. Le tableau de droite est celui des compositions, u représente une fonction de x.

Fonction : f	**Dérivée** : f'	$D_{f'}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Fonction	**Dérivée**
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\operatorname{ch} u$	$u' \operatorname{sh} u$
$\operatorname{sh} u$	$u' \operatorname{ch} u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$

Remarque.

Notez que les formules pour $\frac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$ découlent de celle de x^α.