Table des matières

Chapitre 16

Dérivation

Dans ce chapitre (sauf la dernière partie), on considère des fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définies sur une partie I qui est un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux points ou une réunion de tels intervalles.

1 Dérivation

1.1 Généralités

Soit $a \in \mathbf{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 1.1 (Dérivabilité en un point)**.**

(i) *On dit que f est **dérivable** en a si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée **nombre dérivé** de f en a.*

(ii) *On dit que f est **dérivable à droite** en a si $\lim\limits_{h \underset{>}{\longrightarrow} 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f_d(a)$ et appelée **nombre dérivé à droite** en a.*

(iii) *On dit que f est **dérivable à gauche** en a si $\lim\limits_{h \underset{<}{\longrightarrow} 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f_g(a)$ et appelée **nombre dérivé à gauche** en a.*

Remarques.

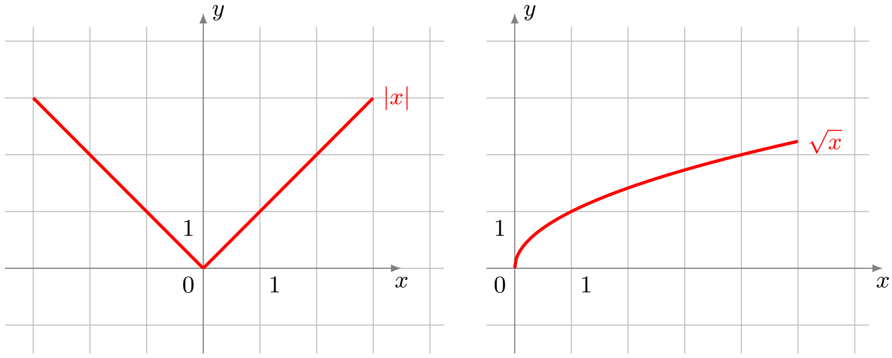
— *f est dérivable en a si et seulement si $f_d(a) = f_g(a)$*

— *On a aussi f dérivable en a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.*

Exemple 1.1.

$f : x \to\mid x \mid$ est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

$f : x \to \sqrt{x}$ est n'est ni dérivable à droite ni dérivable en 0.



Proposition 1.1 (Développement limité à l'ordre 1).
La fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ (qui sera $f'(a)$) et une fonction ε définie sur un voisinage de 0 à valeurs réelles telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ avec :

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + h\,\varepsilon(h).$$

*La dernière équation est appelée **développement limité à l'ordre 1 de f en a**.*

Remarque.
Voici une autre reformulation de la dérivabilité de f en a :
f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ ($\ell = f'(a)$) et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbf{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ avec

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x).$$

La quantité $f(a) + (x-a)f'(a)$ est appelée **approximation affine** de f en a.

Définition 1.2 (Fonction dérivée).
*Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I on dit que f est **dérivable** sur I et la fonction $f' : \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}\right.$ est appelée **fonction dérivée** de f que l'on note f' ou Df ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.*

Remarque.
On suppose connues les dérivées des fonctions usuelles. lorsque l'on parle d'une fonction f, on suppose qu'elle est définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{R}$

2 Propriétés de la dérivation

Proposition 2.1 (Dérivabilité $\implies$ continuité).
Si f est dérivable en $a \in I$ alors f est continue en a.

Remarque.
La réciproque est fausse. Comme contre exemple, prenez la fonction $f : x \to \mid x \mid$, f est continue en 0 mais pas dérivable en ce point.

Proposition 2.2 (Tangente).
Si f est dérivable en a, alors sa courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au point d'abscisse a une tangente d'équation :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Remarques.

1. *Un vecteur directeur de la tangente est* $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$
2. *Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a , $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente à droite (resp. à gauche) au point d'abscisse a.*
3. *Si* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand h tend vers 0 (ou 0^+, ou 0^-) on admet que $(\mathscr{C}_f)$ a une tangente (ou une demi tangente) verticale en le point $(a, f(a))$.*

Proposition 2.3 (Opération sur les fonctions dérivables).
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors :

(*i*) *$f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$;*
(*ii*) *af ($a \in \mathbf{R}$) est dérivable sur I et $(a \times f)' = a \times f'$;*
(*iii*) *fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$;*
(*iv*) *si f ne s'annule pas sur I , $1/f$ est dérivable sur I et* $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{-f'}{f^2}$;
(*v*) *si g ne s'annule pas sur I , f/g est dérivable sur I et* $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Remarques.

1. *On note $\mathcal{D}(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.*
2. *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables sur I ($n \geqslant 2$). Alors $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$ est dérivable sur I et* $(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_i' \times \cdots \times f_n)$.

Proposition 2.4 (Composition de fonctions dérivables).
Soient f dérivable sur I et g dérivable sur J avec $f(I) \subset J$. Alors :

$$g \circ f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } (g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Corollaire (Applications).

(*i*) *Soient u dérivable sur I et $n \in \mathbf{N}^*$. L'application u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.*
(*ii*) *Soit u dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I. Alors $f = \ln|u|$ est dérivable sur I et* $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple 2.1.
Calculer la dérivée de $f : x \to \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)$.

Proposition 2.5 (Fonctions réciproques).
Soient f une fonction continue strictement monotone de I sur $J = f(I)$ et $a \in I$ tel que f dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$. Alors :

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b = f(a) \text{ et } \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Corollaire (Applications aux fonctions circulaires réciproques).

(*i*) *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(*ii*) *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(*iii*) *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et* $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3 Dérivées successives

3.1 Généralités

Définition 3.1 (Dérivées successives).
*Si f est dérivable sur I et f' est dérivable sur I on dit que f est **deux fois dérivable** sur I et on note f'' la dérivée de f'.*
*Par récurrence on peut ainsi définir la dérivée $n-$ième comme la dérivée de la dérivée $(n-1)-$ième et on dit que f est n **fois dérivable** sur I :*

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{et par convention} \quad f^{(0)} = f.$$

On peut noter la dérivée $n-$ième $f^{(n)}$ ou $\mathrm{D}^n f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Remarque (Dérivées successives).
L'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I est noté $\mathcal{D}^n(I,\mathbf{R})$.
On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout n de $\mathbf{N}$.

Remarque. Par abus de langage et pour alléger la rédaction, on écrit parfois $(f(x))^{(n)}$ au lieu de $f^{(n)}(x)$ pour désigner la dérivée $n-$ième de la fonction f évaluée en x.

Proposition 3.1 (Exemples à connaître).

(*i*) $\forall p \in \mathbf{N}$, $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$(\mathrm{e}^x)^{(p)} = e^x, \quad (\sin)^{(p)}(x) = \sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad (\cos)^{(p)}(x) = \cos\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)$$

(*ii*) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|\begin{array}{lll} \text{si} & 0 \leqslant p \leqslant n & (x^n)^{(p)} = \dfrac{n!}{(n-p)!}x^{n-p} \\ \text{si} & p > n & (x^n)^{(p)} = 0 \end{array}\right.$.

(*iii*) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$:

$$(x^\alpha)^{(p)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)x^{\alpha-p}.$$

3.2 Formule de Leibniz

Théorème 3.1 (Formule de Leibniz).
Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I ($n \in \mathbf{N}$). Alors :

$$f \times g \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \text{ et } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

Exemple 3.1.
- *Pour $n = 1$ on retrouve $(f \times g)' = f'g + fg'$.*
- *Pour $n = 2$, on a $(f \times g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.*

Exercices d'application.

1. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f_1(x) = x \ln x$ et $f_2(x) = x^2 \ln x$.*
2. *Soit $f :]1, +\infty[\to]-1, +\infty[$ définie par $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection. Notons $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.*
3. *Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(1 + x)$.*

3.3 Classe d'une fonction

Définitions 3.1 (Classe $\mathcal{C}^n$ et classe $\mathcal{C}^\infty$).
Soit $n \in \mathbf{N}$.

(i) *On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^n$ sur I si :*
- *f est n fois dérivable sur I ;*
- *$f^{(n)}$ est continue sur I.*

(ii) *On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est indéfiniment dérivable sur I.*

Pour $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, on note $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbf{R}$.

Remarques.

1. *Une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur I est une fonction continue sur I.*
2. *Une fonction peut être n fois dérivable sur I sans être de classe $\mathcal{C}^n$.*

Exemple 3.2.

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ mais que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

Proposition 3.2 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$).
La somme, le produit, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

Remarque.
Les fonctions polynômiales, sinus, cosinus, exp,... sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Proposition 3.3 (Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$).
Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ et $g \in \mathcal{C}^n(f(I), \mathbf{R})$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ pour $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

4 Théorème de Rolle et des accroissements finis

4.1 Extremum local

Définitions 4.1 (Extremum local).
Soient f définie sur un intervalle I et $a \in I$.

(i) *On dit que la fonction f admet un* ***maximum*** *(resp. un* ***minimum***) ***local*** *en a s'il existe un intervalle ouvert J de centre a tel que :*

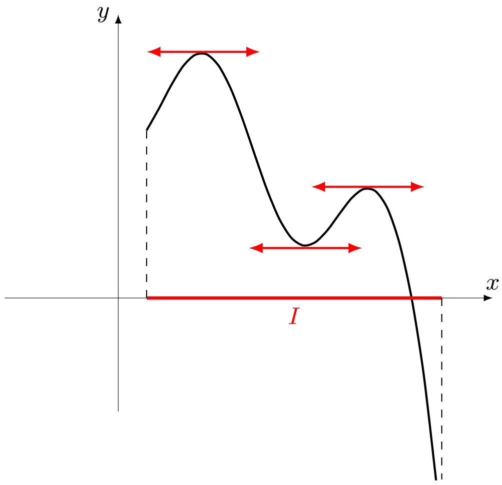
$$\forall x \in I \cap J,\ f(x) \leqslant f(a) \quad (resp.\ \ f(x) \geqslant f(a)).$$

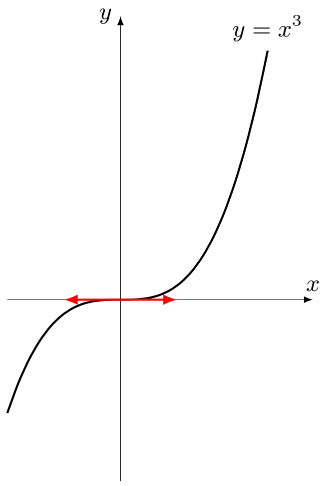
(ii) *On dit que la fonction f admet un* ***extremum local*** *en a si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.*

Remarque.
Un minimum ou un maximum ou un extremum est qualifié de **global** si l'inégalité est vérifiée pour tout $x \in I$.

Théorème 4.1 (Condition nécessaire).
Soit f définie sur un intervalle ouvert I dérivable en $a \in I$.
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque.
La réciproque de ce théoème est fausse. Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ est dérivable en 0 et vérifie $f'(0) = 0$ mais n'admet pas d'extremum local en 0.



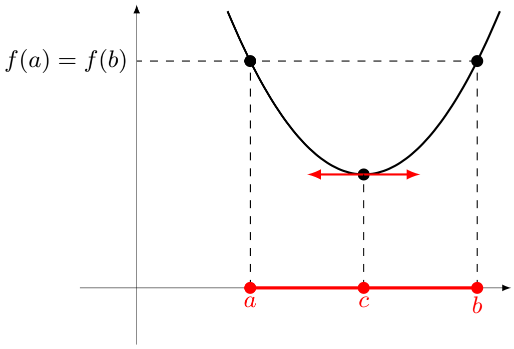


4.2 Théorème de Rolle

Théorème 4.2 (Théorème de Rolle).
Soit f une fonction qui vérifie les conditions suivantes :

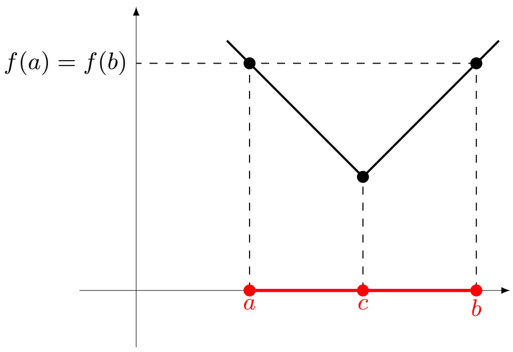
(i) *f continue sur $[a, b]$ ($b \neq a$),*
(ii) *f dérivable sur $]a, b[$,*
(iii) *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

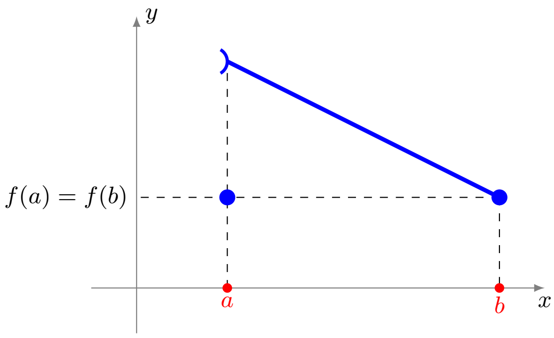


Remarque.

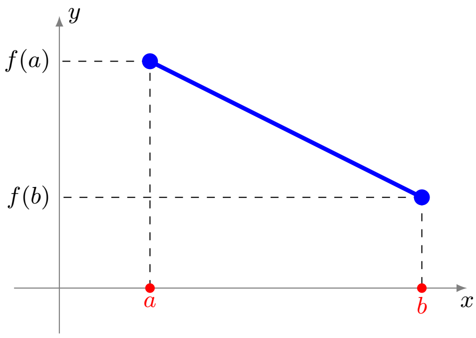
Si l'une des trois hypothèses du théorème de Rolle n'est pas vérifiée, le théorème ne s'applique pas comme le montrent les exemples suivants :



f non dérivable sur $]a, b[$



f non continue sur $[a, b]$



$f(a) \neq f(b)$

Remarque.

Sous les mêmes hypothèses que le théorème de Rolle, si de plus $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

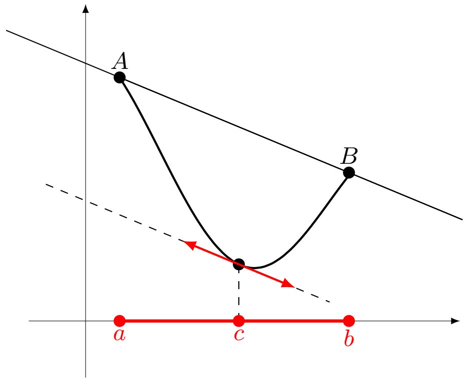
Donc entre 2 zéros de f , il existe au moins un zéro de f'.

4.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 4.3 (Théorème des accroissements finis)**.**
Soit f est une fonction qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) f continue sur $[a, b]$ $(b \neq a)$,
(ii) f dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.
Interprétation cinématique : Si la fonction f représente la position d'un point mobile au cours du temps, alors le théorème des accroissements finis indique qu'il existe un instant t où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne.

Corollaire (Inégalité des accroissements finis)**.**
Soit f est une fonction qui vérifie les deux conditions suivantes :
(i) *f continue sur $[a, b]$ $(b \neq a)$,*
(ii) *f dérivable sur $]a, b[$.*
S'il existe $M > 0$ tel que pour tout réel $x \in]a, b[$, $\mid f'(x) \mid \leqslant M$. Alors :

$$\forall (x_1, x_2) \in ([a, b])^2, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|\,.$$

4.4 Applications du théorème des accroissements finis

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. On note $\mathring{I}$ l'intervalle I privé de ses extrémités éventuelles.

Théorème 4.4 (Dérivée et sens de variation)**.**
Soit f une fonction continue sur I dérivable sur $\mathring{I}$.

(i) *f est constante sur I si, et seulement si $f' = 0$ sur $\mathring{I}$.*
(ii) *f est croissante (resp. décroissante) sur I si, et seulement si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$.*
(iii) *f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si, et seulement si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur $\mathring{I}$ et ne s'annule qu'en des points isolés.*

Théorème 4.5 (Prolongement de la dérivée)**.**
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ $(b > a)$.
(i) *Si f' admet une limite finie à droite en a, alors :*

f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$.

(ii) *Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors :*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \text{ (resp. } -\infty).$$

Remarque.
Si f est continue sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et telle que $\lim\limits_{x \to a^+} f' = \ell$ ($\ell \in \mathbf{R}$), alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$.

Exemple 4.1.
Étudier la dérivabilité en 0 *de* $f : x \mapsto \arccos(1-x^5)$.

Théorème 4.6 (Extension du théorème de Rolle)**.**
Soit f *continue sur* $[a,+\infty[$, *dérivable sur* $]a,+\infty[$ *et telle que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.
Alors il existe $c \in]a,+\infty[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

5 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

On considère dans ce dernier paragraphe que f est une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ définie sur une partie I qui est un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux points ou une réunion de tels intervalles.

Soit $a \in \mathbf{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Proposition 5.1 (Dérivabilité et parties réelle et imaginaire)**.**
Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$, $a \in I$ *ou une extrémité de* I.

$$f \text{ dérivable en } a \iff \mathrm{Re}(f) \text{ dérivable en } a \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ dérivable en } a.$$

Plus généralement :

$$f \text{ dérivable sur } I \iff \mathrm{Re}(f) \text{ dérivable sur } I \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ dérivable sur } I.$$

Dans le cas où f *est dérivable, on a :*

$$f' = (\mathrm{Re}(f))' + \mathrm{i}\,(\mathrm{Im}(f))'$$