EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE 2

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$$

1. a) Enoncer la formule de Leibniz, qui donne la dérivée n-ième du produit de deux fonctions n fois dérivables.

b) Après avoir justifié que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, expliciter la dérivée n-ième de φ.

2. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$$

Donner une expression simple de S_n en fonction de n, et en déduire la limite de la suite.

EXERCICE 3

Soit $(a;b;\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a, \quad u_1 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \lambda u_n$$

1. On suppose (u_n) convergente. On ne demande pas d'expliciter u_n.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{-b}{\lambda}$.

2. On suppose $\lambda = \dfrac{-1}{4}$.

a) Expliciter u_n en fonction de n, a et b.

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

T.S.V.P.

EXERCICE 4

Soient A, B, C trois points du plan $\mathscr{P}$ tels que $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) > 0$.

On munit $\mathscr{P}$ du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \vec{j}\right)$.

On suppose que les coordonnées de C dans $\mathscr{R}$ sont (α, β).

1. Que signifie $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) > 0$? Justifier que $\beta > 0$.

2. Déterminer une équation cartésienne des médianes de ABC. (On rappelle qu'une médiane passe par un sommet et le milieu du côté opposé.)

3. Démontrer que les médianes de ABC sont concourantes.

EXERCICE 5

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC équilatéral direct.

On munit $\mathscr{P}$ du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où O est le milieu de $[AB]$ et $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$,

et on pose $A(-a\ ;\ 0)$ et $B(a\ ;\ 0)$ dans $\mathscr{R}$ où $a > 0$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de C dans $\mathscr{R}$.

2. Déterminer une équation cartésienne des droites (AC) et (BC).

3. Montrer que si M est un point intérieur au triangle ABC, la somme des distances de M à chaque côté du triangle ABC est constante.

EXERCICE 6

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère deux points distincts A et B.

Soit k un réel strictement positif, et soit Γ_k l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ vérifiant $\dfrac{MA}{MB} = k$.

1. Caractériser Γ_1.

2. On suppose désormais que $k \neq 1$.

a) Montrer qu'un point M de $\mathscr{P}$ appartient à Γ_k si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MA} - k\,\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} + k\,\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

b) Montrer qu'il existe un unique point I (resp. J) de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{IA} - k\,\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (resp. $\overrightarrow{JA} + k\,\overrightarrow{JB} = \vec{0}$).

c) Montrer qu'un point M de $\mathscr{P}$ appartient à Γ_k si, et seulement si, $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$.

d) Caractériser Γ_k.