EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ donc $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur leurs domaines, et f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$.

En 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} \underbrace{=}_{h=x^2} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ (limite usuelle), on en déduit que f est dérivable en 0, et $f'(0)=1$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$; donc f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions continues, et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\right) = 1 = f'(0)$ donc f' est continue en 0.

Finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$

1. a) Enoncer la formule de Leibniz, qui donne la dérivée n-ième du produit de deux fonctions f et g n fois dérivables.

Soient f et g des fonctions n fois dérivables sur D. Alors la fonction fg est n fois dérivable sur D et :

$\forall n \in \mathbb{N}, (fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

b) Après avoir justifié que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, expliciter la dérivée n-ième de φ.

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \dfrac{d^k(x-1)}{dx^k} \dfrac{d^{n-k}\left(\mathrm{e}^x\right)}{dx^{n-k}}$ d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x) = (x-1+n)\mathrm{e}^x$

2. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$

Donner une expression simple de S_n en fonction de n, et en déduire la limite de la suite.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1+k)}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!}\right) = 1 - \dfrac{1}{n!}$ (par téléscopage), et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

EXERCICE 3

Soit $(a;b;\lambda)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^*$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0=a,\ \ u_1=b\ \text{ et }\ \forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+2}=u_{n+1}+\lambda u_n$$

1. On suppose (u_n) convergente. On ne demande pas d'expliciter u_n.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

On sait que (u_n) converge ; notons l sa limite.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+2}=u_{n+1}+\lambda u_n$ donc, par passage à la limite : $l=l+\lambda l$.

Comme $\lambda\neq 0$, on a bien l = 0.

b) On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{-b}{\lambda}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+2}=u_{n+1}+\lambda u_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{1}{\lambda}(u_{n+2}-u_{n+1})$ (car $\lambda\neq 0$).

On en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}, S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k=\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=0}^{n}(u_{k+2}-u_{k+1})=\dfrac{1}{\lambda}(u_{n+2}-u_1)$ (par téléscopage).

(u_n) convergeant vers 0, on en déduit que (S_n) converge vers $\dfrac{-b}{\lambda}$.

2. On suppose $\lambda=\dfrac{-1}{4}$.

a) Expliciter u_n en fonction de *n*, *a* et *b*.

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2-r+\dfrac{1}{4}=0$

qui admet $\dfrac{1}{2}$ pour racine double. On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(\alpha n+\beta)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Les valeurs initiales donnent : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=((2b-a)n+a)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

On prend a = 0 et $b=\dfrac{1}{2}$; $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{n}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}ne^{-n\ln 2}=0$ (par croissances comparées).

D'après la question **1b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k=2$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k=2$.

EXERCICE 4

Soient A, B, C trois points du plan $\mathscr{P}$ tels que $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) > 0$.

On munit $\mathscr{P}$ du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \vec{j}\right)$.

On suppose que les coordonnées de C dans $\mathscr{R}$ sont (α, β).

1. Que signifie $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) > 0$? que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est une base directe du plan.

Justifier que $\beta > 0$. Dans $\mathscr{R}$, $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{vmatrix} > 0$ d'où $\beta > 0$.

2. Déterminer une équation cartésienne des médianes de ABC.

Soient $C'\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ le milieu de [AB], et Δ_C la médiane issue de C.

$$M(x;y) \in \Delta_C \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{C'M}; \overrightarrow{C'C}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \\ y & \beta \end{vmatrix} = 0 \text{ et ainsi : } \Delta_C : \beta\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) y = 0.$$

Soient $A'\left(\frac{\alpha+1}{2}; \frac{\beta}{2}\right)$ le milieu de [BC], et Δ_A la médiane issue de A.

$$M(x;y) \in \Delta_A \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & \frac{\alpha+1}{2} \\ y & \frac{\beta}{2} \end{vmatrix} = 0 \text{ et ainsi : } \Delta_A : \frac{\beta}{2} x - \frac{\alpha+1}{2} y = 0.$$

Soient $B'\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}\right)$ le milieu de [AC], et Δ_B la médiane issue de B.

$$M(x;y) \in \Delta_B \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & \frac{\alpha}{2} - 1 \\ y & \frac{\beta}{2} \end{vmatrix} = 0 \text{ et ainsi : } \Delta_B : \frac{\beta}{2}(x-1) - \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) y = 0.$$

3. Démontrer que les médianes de ABC sont concourantes.

On démontre que Δ_A et Δ_B sont sécantes en $G\left(\frac{\alpha+1}{3}; \frac{\beta}{3}\right)$ en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{\beta}{2} x - \frac{\alpha+1}{2} y = 0 \\ \frac{\beta}{2}(x-1) - \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) y = 0 \end{cases}.$$

Les coordonnées de G vérifiant l'équation de Δ_C, on en déduit que $G \in \Delta_C$.

EXERCICE 5

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC équilatéral direct.

On munit $\mathscr{P}$ du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ où O est le milieu de $[AB]$ et $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$,

et on pose $A(-a\ ;\ 0)$ et $B(a\ ;\ 0)$ dans $\mathscr{R}$ où $a > 0$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de C dans $\mathscr{R}$.

$\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$ étant une base directe orthogonale, on a : $\det\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)>0$ et $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=0$.

Ceci donne : $x_C=0$ et $y_C>0$. De plus, $y_C=OC=\sqrt{BC^2-OB^2}=a\sqrt{3}$.

Finalement, dans $\mathscr{R}$, $C\left(0;a\sqrt{3}\right)$.

2. Déterminer une équation cartésienne des droites (AC) et (BC).

$$M\left(x;y\right)\in\left(AC\right)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+a & a\\ y & a\sqrt{3}\end{vmatrix}=0,\ \text{et ainsi } (AC):\ a\sqrt{3}\left(x+a\right)-ay=0.$$

$$M\left(x;y\right)\in\left(BC\right)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-a & -a\\ y & a\sqrt{3}\end{vmatrix}=0,\ \text{et ainsi } (BC):\ a\sqrt{3}\left(x-a\right)+ay=0.$$

3. Montrer que si M est un point intérieur au triangle ABC, la somme des distances de M à chaque côté du triangle ABC est constante.

Soit M un point intérieur au triangle ABC.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(M;(BC)\right)+\mathrm{d}\left(M;(AC)\right)+\mathrm{d}\left(M;(AB)\right)&=\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}\right)\right|}{BC}+\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right)\right|}{AC}+\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)\right|}{AB}\\&=\frac{-\det\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}\right)}{BC}+\frac{\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right)}{AC}+\frac{-\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)}{AB}\\&=\frac{-a\sqrt{3}\left(x-a\right)-ay}{2a}+\frac{a\sqrt{3}\left(x+a\right)-ay}{2a}+\frac{2ay}{2a}=a\sqrt{3}\end{aligned}$$

(En deuxième ligne, on exploite le fait que M est intérieur à ABC et que ABC est direct.)

EXERCICE 6

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère deux points distincts A et B.

Soit k un réel strictement positif, et soit Γ_k l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ vérifiant $\dfrac{MA}{MB}=k$.

1. Caractériser Γ_1. $M\in\Gamma_1\Leftrightarrow MA=MB$ donc Γ_1 est la médiatrice de [AB].

2. On suppose désormais que $k\neq 1$.

a) Montrer qu'un point M de $\mathscr{P}$ appartient à Γ_k si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MA}-k\,\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}+k\,\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{MA}-k\,\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}+k\,\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\left(\overrightarrow{MA}-k\,\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}+k\,\overrightarrow{MB}\right)=0$ et

$\left(\overrightarrow{MA}-k\,\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}+k\,\overrightarrow{MB}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-k^2\overrightarrow{MB}^2=0 \Leftrightarrow MA=k\,MB \Leftrightarrow \dfrac{MA}{MB}=k.$

b) Montrer qu'il existe un unique point I (resp. J) de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{IA}-k\,\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (resp. $\overrightarrow{JA}+k\,\overrightarrow{JB}=\vec{0}$).

$\overrightarrow{IA}-k\,\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}-k\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{AB};$ ainsi il existe un unique point I de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{IA}-k\,\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (I est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{k}{1-k}$).

De même, J est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{-k}{1+k}$.

Par ailleurs $I\neq J$ puisque, pour $k>0$ et $k\neq 1$, $\dfrac{k}{1-k}\neq\dfrac{-k}{1+k}$.

c) Montrer qu'un point M de $\mathscr{P}$ appartient à Γ_k si, et seulement si, $\overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{MJ}=0.$

$\left(\overrightarrow{MA}-k\,\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}+k\,\overrightarrow{MB}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}-k\,\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-k\,\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{MJ}+k\,\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+k\,\overrightarrow{JB}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$

d) Caractériser Γ_k. Puisque $I\neq J$, Γ_k est le cercle de diamètre [IJ]