EXERCICE 1

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

1. a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

2. Pour tout réel x, on note : $g(x) = f(x) + x$.

a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.
On dit que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote en $-\infty$ la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x$.

b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$; en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

3. Soit a un nombre réel non nul. On note M et N les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et $-a$.

a) Vérifier que : $f(a) - f(-a) = -a$.
En déduire que la droite (MN) garde une direction (« pente ») constante , à préciser.

b) Montrer que l'on a : $f'(a) + f'(-a) = -1$.
En déduire que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.

c) Esquisser $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ (unité 4 cm), et illustrer les résultats précédents sur $\mathscr{C}$ pour $a = 1$.
On donne : $f(1) \simeq 0{,}3$, et $\ln(2) \simeq 0{,}7$.

EXERCICE 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pour tout réel positif x, on note $\sqrt[n]{x}$ le réel positif a tel que $a^n = x$.
On donne n réels strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n$ et on pose :

$$u = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad v = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

Les nombres u, v, et w sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres $a_1, a_2, ..., a_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln x \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}.$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(x) \leq x - 1.$$

3. Montrer que :

$$v \leq u; \qquad \text{on note (*) cette inégalité.}$$

4. En utilisant l'inégalité (*), montrer que :

$$w \leq v.$$

5. En appliquant l'inégalité (*), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}.$$

T.S.V.P.

EXERCICE 3

1. Enoncer la formule du binôme de Newton.

2. Soient $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

b) $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k$

c) $U = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

d) $V = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i}$

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les trois sommes u_n, v_n, et S_n par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k}$$

1. En calculant de deux façons différentes $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3 \right)$ (somme télescopique et développement), montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Déterminer les réels a, b et c vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n+1} - \frac{1}{2} u_n - 1$$

4. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n à l'aide des termes de la suite (u_n).