TD 13 : Calcul matriciel

Exercice 1

Soit : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Déterminer l'ensemble E des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 2

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

1/ $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbf{R}$.

2/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on pourra poser $A = 2I_3 + J$.

Exercice 3

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On note $A \times B = C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \times A = D = (d_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1/ Soit $i \in [\![1, n]\!]$, calculer c_{ii} et d_{ii}.

2/ En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}$.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1/ Montrer que $A^2 = A - I_2$.

2/ Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

3/ Montrer que A et inversible, puis déterminer son inverse. En déduire A^n pour $n \in \mathbf{Z}$.

4/ Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = & u_n + v_n \\ v_{n+1} = & -u_n \end{cases}$.

Calculer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 5

Déterminer si chacune des matrices suivantes est inversible, si oui calculer son inverse.

1/ $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2/ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3/ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Soit : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Calculer $M^2 - 3M$. En déduire, sans calcul supplémentaire, que M est inversible puis déterminer son inverse.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que : $A^p = 0_n$.

Démontrer que la somme de deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui **commutent** est une matrice nilpotente.

Exercice 8

Résoudre à l'aide d'un calcul matriciel : $\begin{cases} 2x & -y & -2z & = & 5 \\ 2x & -2y & +3z & = & 2 \\ x & -y & +z & = & 3 \end{cases}$.