Table des matières

Chapitre 13

Calcul matriciel

Pour ce chapitre $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, n, p, q, r désigneront des entiers naturels non nuls.

1 Ensembles de matrices

1.1 Généralités

Définitions 1.1 (Rappel).

(i) *On appelle **matrice de taille** $n \times p$ **à coefficients dans** $\mathbf{K}$ toute famille A de $n \times p$ nombres de $\mathbf{K}$ écrite sous la forme d'un tableau :* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *ce qui donne explicitement :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le nombre a_{ij} est le coefficient de A situé à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne.
La matrice $L_i(A) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix}$ est appelée la i-ième ligne de A.

La matrice $C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ *est appelée la j-ième colonne de A.*

On peut écrire : $A = \begin{pmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_n(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(A), & \dots, & C_p(A) \end{pmatrix}$

(ii) *L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*

(iii) *Pour $n = p$ on dit que la matrice est **carrée**. L'ensemble des matrices carrées est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

(iv) *Pour $p = 1$ on dit que la matrice est une matrice **colonne** de taille n.*

(v) *Pour $n = 1$ on dit que la matrice est une matrice **ligne** de taille p.*

Remarques.

- *On utilise de préférence i pour les lignes et j pour les colonnes.*
- *On note suivant les cas a_{ij} ou A_{ij} le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne d'une matrice A.*

— *S'il n' y a pas d'ambiguïté sur la matrice, on notera simplement L_i pour la i-ème ligne et C_j pour la j-ème colonne de la matrice.*

Exemple 1.1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ *est une matrice 3×2 avec, par exemple, $a_{2,2} = 3$ et $a_{3,2} = 7$.*

Définition 1.1 (Matrices canonique)**.**
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, on définit la ***matrice canonique*** E_{ij} *par :*

$$\begin{array}{cc} & \textit{colonne } j \\ \textit{ligne } i \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ & \downarrow & \\ & \boxed{1} & \\ & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}).$$

Ses éléments sont tous nuls sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

Exemple 1.2. *Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{K})$ sont :*
$\mathrm{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
et $\mathrm{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 1.2 (Matrice diagonale)**.**
On appelle ***matrice diagonale****, une matrice carrée* $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ *définie par :*

$$D = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}).$$

Tous ses éléments, en dehors de la diagonale, sont nuls.

Exemple 1.3. *Les matrices* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *sont diagonales.*

Définition 1.3 (La matrice identité)**.**
On appelle ***matrice identité*** *de taille n la matrice carrée :*

$$\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

Ses éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et tous ses autres éléments sont nuls.
On note la matrice identité I_n.

Définition 1.4 (Matrice triangulaires).

(i) On appelle ***matrice triangulaire supérieure****, une matrice carrée définie par :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}).$$

(ii) On appelle ***matrice triangulaire inférieure****, une matrice carrée définie par :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}).$$

Exemple 1.4. *Les matrices* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ *sont respectivement triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.*

Définitions 1.2 (Égalité).
Deux matrices sont ***égales*** *lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.*

1.2 Combinaison linéaires de matrices

Définition 1.5 (Addition matricielle).
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on définit la somme de A et B par :
$A + B = C$ *avec* $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple 1.5.
Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, *alors* $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Définition 1.6 (Multiplication par un scalaire).
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit le produit de A par λ par :
$\lambda \times A = \lambda A = C$ *avec* $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$: $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Exemple 1.6.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ *alors* $2A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -8 & 12 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $-10A = \begin{pmatrix} -10 & -40 \\ 40 & -60 \\ -50 & -10 \end{pmatrix}$.

Définitions 1.3 (Matrice nulle - Matrice opposée)**.**

(i) *On appelle matrice* ***nulle*** *et on note* 0_{np} *(ou* 0 *s'il n'y pas d'ambiguïté) la matrice dont tous les coefficients sont nuls.*

(ii) *On appelle matrice* ***opposée*** *de* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *la matrice* $-1 \times A$*, notée* $-A$*.*

Exemple 1.7.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1,1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

Déterminer $2A - B$*.*

Attention

Une combinaison linéaire de matrices n'a de sens que pour des matrices de même taille.

Proposition 1.1 (Structure vectorielle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$)**.**
Soient A*,* B *et* C *trois matrices appartenant à* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*. Soient* $\alpha \in \mathbf{K}$ *et* $\beta \in \mathbf{K}$ *deux scalaires.*

(i) $A + B = B + A$: ***commutativité****,*

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$: ***associativité****,*

(iii) $A + 0 = A$: ***l'élément neutre****,*

(iv) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$: ***distributivité****,*

(v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$: ***distributivité****.*

Exercices d'application.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices.*
2. *Calculer* $3A - 2C$ *et* $3B + 2D$*.*
3. *Existe-t-il un réel* x *tel que* $A + xC$ *soit la matrice nulle ?*

1.3 Multiplication de matrices

Définition 1.7 (Produit de deux matrices)**.**
Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ *Alors le* ***produit*** $C = A \times B$ *est une matrice de* $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ *dont les coefficients* c_{ij} *sont définis pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$ *et tout* $j \in [\![1, q]\!]$ *par :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple 1.8. *Voici deux exemples d'écriture de* c_{ij} *d'une façon plus développée :*

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{p} a_{1k} b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1};$$

$$c_{25} = \sum_{k=1}^{p} a_{2k} b_{k5} = a_{21}b_{15} + a_{22}b_{25} + \cdots + a_{2p}b_{p5}.$$

Remarque. Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante :

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} & = B \\
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \ \cdots \ a_{ik} \ \cdots \ a_{ip}} & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \downarrow & \\ - & - \rightarrow & \boxed{c_{ij}} & \\ & & & \end{pmatrix} & \leftarrow A \times B
\end{array}
$$

L'élément se trouvant à la position (i, j) de $A \times B$ est le produit de la i-ème ligne de A et de la j-ème colonne de B, autrement dit : $c_{ij} = L_i(A) \times C_j(B)$.

Exemples 1.9.

1. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* AB.
2. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. *Calculer* AB *puis* BA.
3. *Généralisation :*

   Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. *Calculer* AB *(appelé* ***produit scalaire****) puis* BA *(appelée* ***matrice de Gram****).*

Remarque. Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B.

Attention

• **Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.**
En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

• $AB = 0$ **n'implique pas** $A = 0$ **ou** $B = 0$**.**
Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

• $AB = AC$ **n'implique pas** $B = C$**.** On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple 1.10.

Soient $A \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. *On a* $A \times B = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$, *mais* $B \times A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$.

Exemple 1.11.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 1.12.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ *On a* $A \times B = A \times C = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$.

1.4 Propriétés du produit de matrices

Dans les propositions suivantes, on suppose que les produits matriciels sont possibles.

Proposition 1.2 (Propriétés du produit)**.**

(i) $A(BC) = (AB)C$ *:* ***associativité****,*

(ii) $A(B+C) = AB + AC$ *et* $(B+C)A = BA + CA$ *:* ***distributivité*** *du produit par rapport à la somme,*

(iii) $A \cdot 0 = 0$ *et* $0 \cdot A = 0$.

Proposition 1.3 (Élément neutre pour la multiplication)**.**
Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*, alors*

$$I_n \cdot A = A \qquad \text{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

Remarque. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication.

Définition 1.8 (Symbole de Kronecker)**.**
Si i et j sont deux entiers, on appelle ***symbole de Kronecker****, et on note $\delta_{i,j}$, le réel définie par :*

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Proposition 1.4 (Produit de matrices canoniques)**.**
Pour deux matrices canoniques E_{ij} *et* E_{kl} *de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$*, on a :*

$$\mathrm{E}_{ij} \times \mathrm{E}_{kl} = \delta_{j,k}\, \mathrm{E}_{il}.$$

Proposition 1.5 (Produit avec une matrices canonique)**.**
Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$*, on a :*

(i) $\mathrm{E}_{ij} \times A = A'$, *avec* $L_k(A') = \begin{cases} L_j(A) & \text{si} \quad k = i \\ (0, \ldots, 0) & \text{si} \quad k \neq i. \end{cases}$

(ii) $A \times \mathrm{E}_{ij} = A'$, *avec* $C_k(A') = \begin{cases} C_i(A) & \text{si} \quad k = j \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si} \quad k \neq j. \end{cases}$

Exemple 1.13. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On a :*

$$\mathrm{E}_{23} \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A \times \mathrm{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.5 Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$, la multiplication des matrices est une **opération interne**, c'est-à-dire : si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ alors $AB \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Définition 1.9 (Puissance d'une matrice)**.**
Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on définit les puissances successives de A par :

$$A^0 = I_n \text{ et } A^{p+1} = A^p \times A \text{ pour tout } p \in \mathbf{N}.$$

Autrement dit :

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}.$$

1.6 Formule du binôme

Proposition 1.6 (Calcul de $(A+B)^p$ lorsque $AB = BA$)**.**
Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui ***commutent****, c'est-à-dire tels que $AB = BA$.*
Alors, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a la formule

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

où $\binom{p}{k}$ désigne le coefficient du binôme.

Remarque. Cette formule est souvent utilisée avec $B = I_n$ ou $B = -I_n$, car ces deux matrices commutent avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Exemple 1.14. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Écrire $A = N + I_3$, puis calculer A^k avec $k \in \mathbf{N}$.*

Attention

Le produit matriciel n'étant pas commutatif, les identités remarquables sont donc en général fausses. En particulier :

$$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2,$$

on a juste :

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

De même :

$$(A+B)\times(A-B) \neq A^2-B^2,$$

on a simplement :

$$(A+B)\times(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2.$$

Exercices d'application.

1. *Soient* $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. *Quels produits sont possibles ? Les calculer !*
2. *Soient* $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^2, B^2, AB *et* BA.
3. *Soient* $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^p *et* B^p *pour tout* $p \geq 0$. *Montrer que* $AB=BA$. *Calculer* $(A+B)^p$.

2 Opérations élémentaires sur une matrice

2.1 Matrices élémentaires

Définitions 2.1 (Opérations sur les lignes).
On définit les trois opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire ou d'une matrice :

(i) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *avec* $\lambda \neq 0$ *: multiplier une ligne par un scalaire* λ *non nul.*
(ii) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ *avec* $\lambda \in \mathbf{K}$ *(et* $j \neq i$*) : ajouter à la ligne* L_i *un multiple d'une autre ligne* L_j.
(iii) $L_i \leftrightarrow L_j$ *: échanger deux lignes.*

Définition 2.1 (Matrice de transvection).
Une matrice est dite ***de transvection*** *si elle vérifie :*

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \\ & 1 & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \lambda \mathrm{E}_{i,j}.$$

avec $i,j \in [\![1,n]\!], i \neq j$ *et* $\lambda \in \mathbf{K}$.
Une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ *est donc une matrice triangulaire dans* $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ *dont tous les termes diagonaux valent* 1 *et de termes hors de la diagonale tous nuls sauf celui d'indice* (i,j) *qui vaut* λ.

Proposition 2.1 (Transvection).
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$:

(i) *le produit $T_{ij}(\lambda) \times A$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$, c'est-à-dire effectuer l'opération suivante $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur la matrice A ;*

(ii) *le produit $A \times T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_i par $C_i + \lambda C_j$, c'est-à-dire effectuer l'opération suivante $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ sur la matrice A.*

Remarque. Cette proposition reste valable pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Si on effectue des opérations sur les lignes, il faut que $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $i \neq j$.
Si on effectue des opérations sur les colonnes, il faut que $i, j \in [\![1, p]\!]$ et $i \neq j$.

Exemple 2.1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, *considérons* $T_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *alors :*

$$T_{21}(-3) \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad A \times T_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 7 \\ 5 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ceci correspond respectivement aux opérations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ *et* $C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1$.

Définition 2.2 (Matrice de dilatation).
On appelle ***matrice de dilatation*** *toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui vérifie :*

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)\,\mathrm{E}_{i,i},$$

avec $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbf{K}^*$.
Une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est donc diagonale de termes diagonaux tous égaux à 1 sauf le numéro i qui vaut λ.

Proposition 2.2 (Dilatation).
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}^*$:

(i) *le produit $D_i(\lambda) \times A$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par λL_i, c'est-à-dire effectuer l'opération suivante $L_i \leftarrow \lambda L_i$ sur la matrice A ;*

(ii) *le produit $A \times D_i(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_i par λC_i, c'est-à-dire effectuer l'opération suivante $C_i \leftarrow \lambda C_i$ sur la matrice A.*

Remarque. Cette proposition reste valable pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Si on effectue des opérations sur les lignes, il faut que $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbf{K}^*$.
Si on effectue des opérations sur les colonnes, il faut que $i \in [\![1, p]\!]$ et $\lambda \in \mathbf{K}^*$.

Exemple 2.2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, *considérons* $D_1(3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *alors :*

$$D_1(3) \times A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad et \quad A \times D_1(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 15 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ceci correspond respectivement aux opérations suivantes : $L_1 \leftarrow 3L_1$ *et* $C_1 \leftarrow 3C_1$.

Définition 2.3 (Matrice de permutation)**.**
Une matrice est dite de ***permutation*** *si elle vérifie :*

$$P_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n - (\mathrm{E}_{i,i} + \mathrm{E}_{j,j}) + (\mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{E}_{j,i}).$$

avec $i \in [\![1, n]\!]$ *et* $\lambda \in \mathbf{K}$.
Une matrice de permutation est dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ *et tous ses termes diagonaux valent* 1 *sauf le* i*-ème et le* j*-ème termes qui sont nuls et de termes hors de la diagonale tous nuls sauf celui d'indice* (i, j) *et* (j, i) *qui valent* 1.

Proposition 2.3 (Transvection)**.**
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, *pour tous* $i, j \in [\![1, n]\!]$ *:*

(*i*) *le produit* $P_{ij} \times A$ *a pour effet de permuter la ligne* L_i *avec la ligne* L_j*, c'est-à-dire effectuer l'opération suivante* $L_i \leftrightarrow L_j$ *sur la matrice* A *;*

(*ii*) *le produit* $A \times T_{ij}(\lambda)$ *a pour effet de permuter la colonne* C_i *avec la colonne* C_j*, c'est-à-dire effectuer l'opération suivante* $C_i \leftrightarrow C_j$ *sur la matrice* A.

Remarque. Cette proposition reste valable pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Si on effectue une permutation sur les lignes (resp. sur les colonnes), il faut que $i, j \in [\![1, n]\!]$ (resp. $i, j \in [\![1, p]\!]$).

Exemple 2.3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, *considérons* $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *alors :*

$$P_{13} \times A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad A \times P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ceci correspond respectivement aux opérations suivantes : $L_1 \leftrightarrow L_3$ *et* $C_1 \leftrightarrow C_3$.

Définition 2.4 (Matrices élémentaires)**.**
On appelle ***matrice élémentaire*** *une matrice de transvection ou de dilatation ou de permutation.*

2.2 Équivalence à une matrice échelonnée

Définition 2.5 (Matrices équivalentes).
*Deux matrices A et B sont dites **équivalentes par lignes** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$.*

Remarque. La relation « équivalentes par lignes » est une relation d'équivalence, elle vérifie entre autres la transitivité, c'est-à-dire : Si $A \sim B$ et $B \sim C$, alors $A \sim C$.

Définition 2.6 (Matrice échelonnée réduite).
*Une matrice échelonnée en lignes est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.*

Remarque.

Une matrice est échelonnée si :

— le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement de ligne à une ligne suivante jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.

Elle est échelonnée réduite si en plus :

— le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 ;
— et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemples 2.4.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *sont échelonnées réduites par lignes.*

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ne sont pas échelonnées réduites par lignes.*

Théorème 2.1 (Algorithme de Gauss- Jordan).
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes. Autrement dit, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $R = \mathrm{E} \times A$.

Exemple 2.5.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Déterminer R et E.*

3 Matrices carrées inversibles

3.1 Définition

Définition 3.1 (Matrice inverse)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. S'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que

$$AB = I_n \qquad \textit{et} \qquad BA = I_n,$$

*on dit que A est **inversible**. On appelle B l'**inverse de** A et on la note A^{-1}.*

Exemples 3.1.

1. *La matrice identité I_n est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et son inverse est elle-même.*
2. *Les matrices élémentaires sont inversibles. L'inverse de la matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est $D_i(1/\lambda)$, l'inverse de la matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ est $T_{i,j}(-\lambda)$ et l'inverse de la matrice de permutation $P_{i,j}$ est $P_{j,i}$.*
3. *Une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ dont tous les éléments de la diagonale ne sont pas nuls est inversible et son inverse est $D^{-1} = \mathrm{Diag}(1/a_1, \ldots, 1/a_n)$.*
4. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet, soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque. Alors le produit :*

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \neq I_2.$$

5. *La matrice nulle 0_n n'est pas inversible. En effet, on sait que, pour toute matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on a $B0_n = 0_n$, qui ne peut jamais être égal la matrice identité.*

Remarque. Si A est inversible, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}.$$

Attention

L'inverse d'une matrice non carrée n'a pas de sens.

3.2 Propriétés

Proposition 3.1 (Unicité)**.**
Si A est inversible, alors son inverse est unique.

Proposition 3.2 (Commutativité)**.**
Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A \times B = I_n$. Alors $B \times A = I_n$ et A, B sont inverses l'une de l'autre.

Remarque. D'après cette proposition, pour justifier que B est l'inverse de A, il suffit de vérifier simplement que $AB = I_n$ ou bien que $BA = I_n$.

Exercices d'application.

1. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^{-1} *et* A^{-2}.
2. *Calculer l'inverse des matrices suivantes* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* $A^2 - 3A$. *En déduire* A^{-1}.

Proposition 3.3 (Inverse de l'inverse)**.**
Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Proposition 3.4 (Inverse d'un produit)**.**
Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Remarque. On montre de même que si A, B, C sont inversibles et de même taille, alors

$$(A \times B \times C)^{-1} = C^{-1} \times B^{-1} \times A^{-1}.$$

Définition 3.2 (Groupe linéaire d'ordre n)**.**
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est appelé ***groupe linéaire d'ordre*** n*.*
Cet ensemble est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Proposition 3.5 (Simplification par une matrice inversible)**.**
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et C une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.

Théorème 3.1 (C.N.S. d'inversibilité d'une matrice)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) *A est inversible ;*
(*ii*) *sa forme échelonnée réduite est la matrice identité I_n, autrement dit $A \sim I_n$;*
(*iii*) *le système linéaire $AX = 0$ n'admet que la solution nulle ;*
(*iv*) *pour tout second membre B, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution X.*

3.3 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$

3.3.1 Méthode de Gauss pour inverser une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$:

Méthode

1. On forme la matrice augmentée $(A|I_n)$;
2. On applique l'algorithme de Gauss- Jordan en effectuant des opérations sur les lignes ;
3. on arrive à la fin du processus à $(I_n|B)$;
4. l'inverse est $A^{-1} = B$.

Remarque. La méthode pour inverser A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I_n. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I_n. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}.

3.3.2 Étude d'un exemple

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I_n) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

2. On applique la méthode de Gauss se ramener à une matrice échelonnée réduite par lignes. Tout d'abord on permute les lignes L_1 et L_2 pour ramener le pivot égal à 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

Pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ qui conduit à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

On permute les lignes L_2 et L_3 pour ramener le pivot égal à -1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & -3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

On multiplie la ligne L_2 afin qu'elle commence par 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sur la colonne du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \end{array}$$

Il ne reste plus qu'à « remonter » pour faire apparaître des zéros au-dessus du dernier pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \\ \\ \end{array}$$

On en déduit que : $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On vérifie rapidement que $A \times A^{-1} = I_3$.

Exercices d'application.

1. *Calculer, si possible, l'inverse des matrices :* $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}$.
2. *Calculer l'inverse de la matrice :* $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, *puis résoudre le système :* $\left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & - & z & = 5 \\ x & + & y & + & 2z & = -8 \\ 3x & + & y & - & 7z & = 2 \end{array}\right.$.
3. *Exprimer les systèmes linéaires suivants sous forme matricielle et les résoudre en inversant la matrice :* $\left\{\begin{array}{rcrl} 7x & + & 3y & = 18 \\ 12x & + & 5y & = 4 \end{array}\right.$ *et* $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & & & - & z & = 3 \\ & & y & + & 2z & = -2 \\ 3x & & & - & 2z & = 9 \end{array}\right.$.

4 Transposition

4.1 Définitions

Définition 4.1 (Transposée).
Soit A la matrice de taille $n \times p$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,p-1} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,p-1} & a_{n-1,p} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n-1,p} & a_{np} \end{pmatrix}.$$

*On appelle **matrice transposée** de A, la matrice de taille $p \times n$ notée A^{T} ou encore ${}^tA$ et définie par :*

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n-1,1} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n-1,2} & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{1,p-1} & a_{2,p-1} & \dots & a_{n-1,p-1} & a_{n-1,p} \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{n-1,p} & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K}).$$

Autrement dit, les lignes de la matrice A deviennent les colonnes pour la matrice transposée soit $L_i(A) = C_i(A^T)$. Ou encore, le coefficient à la place (i, j) de A^{T} est a_{ji}.

Exemple 4.1. $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Définitions 4.1 (Matrices symétriques - Matrices antisymétriques)**.**
Soit A une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$:

(i) *on dit que A est **symétrique** si $A^{\mathrm{T}} = A$;*
(ii) *on dit que A est **antisymétrique** si $A^{\mathrm{T}} = -A$;*

Remarques.

— *Une matrice est symétrique si, et seulement si pour tout couple d'entiers $(j, i) \in [\![1, n]\!]^2$ les coefficients de A vérifient $a_{ij} = a_{ji}$.*
— *Une matrice est antisymétrique si, et seulement si pour tout couple d'entiers $(j, i) \in [\![1, n]\!]^2$ les coefficients de A vérifient $a_{ij} = -a_{ji}$ ce qui entraîne que ses éléments diagonaux sont tous nuls.*

Proposition 4.1 (Forme générale)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$:

(i) *A est symétrique si, et seulement si A est de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(ii) *A est antisymétrique si, et seulement si A est de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{1,n-1} & -a_{2,n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ *sont symétriques, alors que* $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ *sont antisymétriques.*

5 Propriétés de la transposition

La transposition vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 5.1 (Propriétés de la transposition)**.**
Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors :

(i) $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
(ii) $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$;
(iii) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;
(iv) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$;
(v) *Si A est inversible, alors A^{T} l'est aussi et on a $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.*