Table des matières

Dans tout ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

1 Applications linéaires

1.1 Généralités

Définition 1.1 (Application linéaire)**.**
*Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :*

1. $\forall (u, v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ f(\lambda u) = \lambda\, f(u)$.

L'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 1.1 (Caractérisation d'une application linéaire)**.**
*Une application $f : E \to F$ est **linéaire** si, et seulement si :*

$$\forall (u, v) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda\, f(u) + \mu\, f(v).$$

Proposition 1.2.
Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f(0_E) = 0_F$.

Attention

$f(x) = 0_F \not\Rightarrow x = 0_E$.

Vocabulaire :

— Si $E = F$ on dit que f est un **endomorphisme** de E, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.
— Si $F = \mathbf{K}$ on dit que f est une **forme linéaire**.
— Si f est bijective on dit que f est un **isomorphisme** et que E et F sont **isomorphes**.
— Si $E = F$ et f bijective on dit que f est un **automorphisme** de E, on note $\mathrm{GL}(E)$ ou $\mathcal{A}ut(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. Autrement dit, un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Exemples 1.1.

1. *Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, $F = \mathbf{R}$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. L'application* $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ *est une forme linéaire.*
2. *Soient $E = \mathbf{R}^3$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des vecteurs de l'espace et $\vec{v} \in E$. L'application* $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array} \right.$ *est un endomorphisme.*
3. *Soient $E = \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{R}$. L'application* $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \dots + x_n \end{array} \right.$ *est une forme linéaire.*
4. *Soit $E = F = \mathbf{R}[X]$. L'application* $D : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ *est un endomorphisme.*
5. *Soient $E = \mathbf{R}^3$, $F = \mathbf{R}^2$. L'application* $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, x+y+z) \end{array} \right.$ *est une application linéaire.*

Proposition 1.3 (Caractérisation par les restrictions).
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $E = E_1 \oplus E_2$, alors f est entièrement caractérisée par ses restrictions à E_1 et E_2.

1.2 Structure d'espace vectoriel

Définition 1.2 (Addition d'applications linéaires).
*Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit la **somme** de f et g par :*

$$\forall u \in E,\ (f+g)(u) = f(u) + g(u).$$

Exemple 1.2.
Soient $E = F = \mathbf{R}^2$ et $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ définies par $f(x,y) = (x-y, x+y)$ et $g(x,y) = (2x-y, x+3y)$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $(f+g)(x,y) = (3x-2y, 2x+4y)$.

Définition 1.3 (Multiplication par un scalaire).
*Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit le **produit** de f par λ g par :*

$$\forall u \in E,\ (\lambda f)(u) = \lambda . f(u).$$

Exemple 1.3.
Soient $E = F = \mathbf{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y)$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $(2f)(x,y) = (2x-2y, 2x+2y)$.

Définition 1.4 (Application nulle - Application identité).

(i) *On appelle application **nulle** de $\mathcal{L}(E,F)$, l'application que l'on note $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ définie par :*
$$\forall u \in E,\ 0_{\mathcal{L}(E,F)}(u) = 0_F.$$

(ii) *On appelle application **identité** de $\mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme de E que l'on note Id_E et définie par :*
$$\forall u \in E,\ \mathrm{Id}_E(u) = u.$$

Attention
Une combinaison linéaire d'applications linéaires n'a de sens que pour des applications appartenant au même ensemble $\mathcal{L}(E,F)$.

Remarque. Cette proposition implique que pour tous f, g et h de $\mathcal{L}(E,F)$ et $\alpha \in \mathbf{K}, \beta \in \mathbf{K}$ deux scalaires. Alors

(i) $f + g = g + f$: **commutativité**,
(ii) $f + (g+h) = (f+g) + f$: **associativité**,
(iii) $f + 0_{\mathcal{L}(E,F)} = f$: l'**élément neutre**,
(iv) $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$: **distributivité**,
(v) $\alpha(f+g) = \alpha g + \alpha g$: **distributivité**.

1.3 Composition d'applications linéaires

Théorème-Définition 1.1 (Composé).
*Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. On définit la **composé** de g par f l'application linéaire de $\mathcal{L}(E,G)$ que l'on note $g \circ f$ et définie par :*

$$\forall u \in E,\ (g \circ f)(u) = g\left[f(u)\right].$$

Attention

• **La composée d'applications linéaires n'est pas commutatif en général.**
En effet, il se peut que $f \circ g$ soit défini mais pas $g \circ f$, ou que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient tous deux définis mais n'appartenant pas au même espace vectoriel. Mais même dans le cas où $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définis et dans le même ev, on a en général $f \circ g \neq g \circ f$.

• $f \circ g = 0$ **n'implique pas** $f = 0$ **ou** $g = 0$**.**
Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $f \neq 0$ et $g \neq 0$ mais $f \circ g = 0$.

• $f \circ g = f \circ h$ **n'implique pas** $g = h$**.** On peut avoir $f \circ g = f \circ h$ et $g \neq h$.

Exemple 1.4.
Soient $f \in (\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ et $g \in (\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ définies par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n \text{ et } \forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = (x, \ldots, x).$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Dans la proposition suivante , on suppose que les compositions d'applications linéaires ont un sens.

Proposition 1.4 (Propriétés du produit).

(i) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$: ***associativité***,
(ii) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ *et* $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$: ***distributivité*** ,
(iii) $f \circ 0 = 0$ *et* $0 \circ f = 0$.
(iv) $\mathrm{Id} \circ f = f$ *et* $f \circ \mathrm{Id} = f$.

Remarques.

— *Dans le calcul dans $\mathcal{L}(E)$, l'application identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la composition.*
— *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^2 = f \circ f$, et pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois).*
— *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on dit que f est **nilpotent**.*

Exemple 1.5. *Dans $E = \mathbf{K}_n[X]$, l'opérateur de dérivation D est un endomorphisme nilpotent.*

Proposition 1.5 (Isomorphisme).
Soient E et F deux $\mathbf{K}$-ev. Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Proposition 1.6 (Groupe linéaire).
L'ensemble des automorphismes de E que l'on note $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$, c'est-à-dire :

- ***Loi de composition interne :***
  Pour tous f et g éléments de $\mathrm{GL}(E)$, $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$.
- ***Associativité :***
  Pour tous éléments f, g et h de $\mathrm{GL}(E)$, alors $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- ***Élément neutre.***
  *Il existe un élément Id_E de $\mathrm{GL}(E)$ tel que, pour tout f dans $\mathrm{GL}(E)$, $\mathrm{Id}_E \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$, « Id_E est appelé **élément neutre** du groupe $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.*
- ***Symétrique.***
  *Pour tout élément f de $\mathrm{GL}(E)$, il existe g dans $\mathrm{GL}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$, où Id_E est l'élément neutre. g est appelé **inverse** de f.*

*$\mathrm{GL}(E)$ est appelé **groupe linéaire** de E.*

Exercices d'application.
Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Développer $(f+g)^2$ et $(f+g) \circ (f-g)$.*
2. *Factoriser $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E$.*
3. *On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $g = \mathrm{Id}_E - f$ admet un inverse g^{-1}.*
4. *Montrer que la somme de deux automorphismes de E n'est pas toujours un automorphisme de E.*

1.4 Noyau - Image

Proposition 1.7 (Image directe - Image réciproque).
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(i) Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, l'image $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.

(ii) Pour tout sous-espace vectoriel F_1 de F, $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.5 (Noyau - Image).
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

*(i) L'ensemble $f^{-1}(0_F)$ est appelé **noyau** de f et l'on note $\mathrm{Ker}\, f$. Autrement dit :*

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

*(ii) L'ensemble $f(E)$ est appelé **image** de f et l'on note $\mathrm{Im}\, f$. Autrement dit :*

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Théorème 1.1.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

(i) $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
(ii) $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Exemple 1.6. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbf{K}$ et $E_\lambda(f) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$. Déduire de ce qui précède que $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. Dire à quoi correspondent $E_0(f)$ et $E_1(f)$?*

Proposition 1.8 (Injective - Surjective)**.**
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

(i) *f est injective si, et seulement si,* $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
(ii) *f est surjective si, et seulement si,* $\operatorname{Im} f = F$.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Applications linéaires et famille de vecteurs

Proposition 2.1 (Image d'une famille de vecteurs)**.**
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{S} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

(i) $f(\operatorname{Vect}(S)) = \operatorname{Vect}(f(S))$, *c'est-à-dire* $f(\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_1))$
(ii) *f est surjective si, et seulement si, l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.*
(iii) *f est injective si, et seulement si, l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.*
(iv) *f est bijective si, et seulement si, l'image d'une base de E est une base de F.*

Remarque. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_1))$

Proposition 2.2 (Caractérisation d'une AL par une base)**.**
*Soient E un **K**-ev de dimension finie et F un **K**-ev de dimension quelconque. L'application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est entièrement déterminée par la donnée des images par f des éléments d'une base de E.*

Exemple 2.1. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base de $\mathbf{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ $f(e_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ et $f(e_3) = 3\varepsilon_2$. Soit $u \in \mathbf{R}^3$, de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$ et $u' = f(u)$. Déterminer les coordonnées (x', y') de u' dans la base $\mathcal{B}'$ en fonction de x, y, z.*

Théorème 2.1 (Lien entre injective, surjective et bijective)**.**
*Soient E et F deux **K**-ev de **même dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est injective ;*
(ii) *f est surjective ;*
(iii) *f est bijective.*

Proposition 2.3 (Isomorphisme et dimension)**.**
Soient E et F deux $\mathbf{K}$-ev de dimension finie. F est isomorphe à E si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(E)$.

2.2 Rang d'une application linéaire

Définition 2.1 (Rang d'une application linéaire)**.**
*Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de l'application linéaire f est on le note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, f$.*

Remarques.

— *Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors :*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)\right) = \mathrm{rg}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right).$$

— $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min\left(\dim E, \dim F\right).$

Exemple 2.2. *Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (3x - 4y + 2z, 2x - 3y - z)$. Quel est le rang de f ?*

Proposition 2.4 (Invariance du rang)**.**
*Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout automorphisme $g \in \mathrm{GL}(E)$:*

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f \circ g).$$

Remarque. Dans le cas où g n'est pas bijectif, on a $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$.

Le théorème du rang est un résultat fondamental dans la théorie des applications linéaires en dimension finie ; il donne une relation entre la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$ et la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

Théorème 2.2 (Théorème du rang)**.**
*Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :*

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker f).$$

Remarque. A priori, F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque (finie ou infinie). Dans la pratique, cette formule sert à déterminer la dimension du noyau connaissant le rang, ou bien le rang connaissant la dimension du noyau.

Exemple 2.3. *Soit l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} f \quad : \quad \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4) \end{array}$$

Calculons le rang de f et la dimension du noyau de f.

Exemple 2.4. *Soit l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P''(X) \end{array}$$

où $P''(X)$ est la dérivée seconde de $P(X)$. Quel est le rang et la dimension du noyau de f ?

Corollaire (Caractérisation des isomorphismes en dimension finie)**.**
*Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de **même dimension finie** n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est bijective*
2. *f est injective*
3. *f est surjective*
4. $\operatorname{rg} f = n$
5. $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$.

Exemple 2.5. *Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x-y, x+y)$. Une façon simple de montrer que l'application linéaire f est bijective est de remarquer que l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension. Ensuite on calcule le noyau :*

$$\begin{aligned}(x,y) \in \operatorname{Ker} f &\iff f(x,y) = 0 \iff (x-y, x+y) = (0,0) \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right. \iff (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$ est réduit au vecteur nul, ce qui prouve que f est injective et donc, par le corollaire 2.2, que f est un isomorphisme.

Exercices d'application.

1. *Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Donner l'expression de $f(x, y, z)$ où $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est l'application linéaire qui envoie e_1 sur son opposé, qui envoie e_2 sur le vecteur nul et qui envoie e_3 sur la somme des trois vecteurs e_1, e_2, e_3.*
2. *Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - 2y - 3z, 2y + 3z)$. Calculer une base du noyau de f, une base de l'image de f et vérifier le théorème du rang.*
3. *Même question avec $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-y + z, x + z, x + y)$.*
4. *Même question avec l'application linéaire $f : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ qui à X^k associe X^{k-1} pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et qui à 1 associe 0.*
5. *Lorsque c'est possible, calculer la dimension du noyau, le rang et dire si f peut être injective, surjective, bijective :*
   - *Une application linéaire surjective $f : \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^4$.*
   - *Une application linéaire injective $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^8$.*
   - *Une application linéaire surjective $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$.*
   - *Une application linéaire injective $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^6$.*

3 Matrice et application linéaire

Dans cette section, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Nous allons voir dans cette partie le lien entre matrices et applications linéaires.
À une matrice on associe naturellement une application linéaire. Et réciproquement, étant donné une application linéaire, et des bases pour les espaces vectoriels de départ et d'arrivée, on associe une matrice.

3.1 Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient p la dimension de E et n la dimension de F.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F. Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est déterminée par la donnée des images dans F des vecteurs de $\mathcal{B}$. Pour tout

$j \in [\![1,p]\!]$, il existe donc n scalaires uniques $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ tels que :

$$f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \cdots + a_{ij}\varepsilon_i + \cdots + a_{nj}\varepsilon_n = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} .$$

Définition 3.1 (Matrice d'une application linéaire).
On appelle ***matrice de l'application linéaire*** *f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et on la note $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, la matrice dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$:*

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \\ \varepsilon_i \\ \\ \varepsilon_n \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),$$

avec :

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \varepsilon_i.$$

En d'autres termes, c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$.

Remarques.

— *La taille de la matrice $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dépend uniquement de la dimension de E et de celle de F.*

— *Par contre, les coefficients de la matrice dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$ de E et de la base $\mathcal{B}'$ de F.*

— *Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, alors on note simplement $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice associée à l'endomorphisme f de E.*

On sait que si x est un vecteur d'un espace vectoriel E de dimension p, alors pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E, il existe un unique p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de $\mathbf{K}$ tel que :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_p.$$

Définition 3.2 (Matrice des coordonnées).
On appelle ***matrice des coordonnées*** *du vecteur x selon une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E, le vecteur colonne, noté $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.*

Remarque. S'il n'y a pas d'ambigüité sur la base de E, alors on note simplement la matrice des coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ en omettant de mentionner la base.

Proposition 3.1 (Matrice d'une application linéaire).
Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $x \in E$ de matrice $X = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x)$ et $y = f(x)$ de matrice $Y = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(y)$. Alors :

$$Y = AX.$$

Autrement dit :

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x).$$

Exemple 3.1. *Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par*

$$\begin{array}{rcl} f \quad : \quad \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & (x_1+x_2-x_3, x_1-2x_2+3x_3) \end{array}$$

Il est utile d'identifier vecteurs lignes et vecteurs colonnes ; ainsi f peut être vue comme l'application $f : \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ x_1-2x_2+3x_3 \end{smallmatrix}\right)$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. C'est-à-dire :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. *Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?*
2. *On va maintenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée. Soient les vecteurs*

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Justifier que $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1,\phi_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$?

3.2 Opérations sur les matrices d'applications linéaires

Proposition 3.2 (Combinaison linéaire de matrices d'applications linéaires).
Soient $f,g \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors :

(i) $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$;
(ii) $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Proposition 3.3 (Espaces vectoriels isomorphes).
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors, $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont isomorphes.
En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})) = n \times p$.

Proposition 3.4 (Produit de matrices d'applications linéaires).
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G. Alors :

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Exemple 3.2. *On considère deux applications linéaires :* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *et* $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$. *On pose* $E = \mathbf{R}^2$, $F = \mathbf{R}^3$, $G = \mathbf{R}^2$ *avec* $f : E \to F$, $g : F \to G$. *On se donne des bases :* $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *une base de* E, $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *une base de* F, *et* $\mathcal{B}'' = (g_1, g_2)$ *une base de* G.

On suppose connues les matrices de f *et* g *:*

$$A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,2} \qquad B = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

Calculons la matrice associée à $g \circ f : E \to G$, $C = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$, *de deux façons différentes.*

Exemple 3.3.

— *Cas de l'identité :* $\mathrm{Id} : E \to E$ *est définie par* $\mathrm{Id}(x) = x$. *Alors quelle que soit la base* $\mathcal{B}$ *de* E, *la matrice associée est la matrice identité :* $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = I_n$. *(Attention ! Ce n'est plus vrai si la base d'arrivée est différente de la base de départ.)*

— *Cas d'une homothétie* $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(x) = \lambda \cdot x$ *(où* $\lambda \in \mathbf{K}$ *est le rapport de l'homothétie) :* $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.

— *Cas d'une symétrie centrale* $s : E \to E$, $s(x) = -x$ *:* $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(s) = -I_n$.

— *Cas de* $r_\theta : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ *la rotation d'angle* θ, *centrée à l'origine, dans l'espace vectoriel* $\mathbf{R}^2$ *muni de la base canonique* $\mathcal{B}$. *Alors* $r_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\,\theta + y\cos\theta)$. *On a*

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dans le cas particulier de la puissance d'un endomorphisme de E, nous obtenons :

Corollaire (Puissance d'une matrice)**.**
Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{B}$ *une base de* E *et* f *un endomorphisme de* E. *Alors, pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *:*

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(f^n) = \big(\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(f)\big)^n.$$

Exemple 3.4. *Soit* r_θ *la matrice de la rotation d'angle* θ *dans* $\mathbf{R}^2$. *La matrice de* r_θ^p *est :*

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(r_\theta^p) = \big(\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(r_\theta)\big)^p = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^p$$

Un calcul par récurrence montre ensuite que

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(r_\theta^p) = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix},$$

ce qui est bien la matrice de la rotation d'angle $p\theta$ *: composer* p *fois la rotation d'angle* θ *revient à effectuer une rotation d'angle* $p\theta$.

3.3 Matrice d'un isomorphisme

Rappelons qu'un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire bijective. Nous avons vu que cela entraîne $\dim E = \dim F$.

Théorème 3.1 (Caractérisation de la matrice d'un isomorphisme)**.**
Soient E *et* F *deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels de même dimension finie et de bases respectivement* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$. *Si* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, *alors* f *est bijective si et seulement si la matrice* A *est inversible.*

Et dans ce cas, $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \Big(\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\Big)^{-1}$.

Exemple 3.5. *Soient* $r : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *la rotation d'angle* $\frac{\pi}{6}$ *(centrée à l'origine) et* s *la réflexion par rapport à l'axe* $(y = x)$. *Quelle est la matrice associée à* $(s \circ r)^{-1}$ *dans la base canonique* $\mathcal{B}$ *?*

Exercices d'application.

1. *Calculer la matrice associée aux applications linéaires* $\varepsilon_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *dans la base canonique :*
   (a) ε_1 *la symétrie par rapport à l'axe* (Oy),
   (b) ε_2 *la symétrie par rapport à l'axe* $(y = x)$,
   (c) ε_3 *la projection orthogonale sur l'axe* (Oy),
   (d) ε_4 *la rotation d'angle* $\dfrac{\pi}{4}$.

   Calculer quelques matrices associées à $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j$ *et, lorsque c'est possible, à* ε_i^{-1}.
2. *Même travail pour* $\varepsilon_i : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:
   (a) ε_2 *la réflexion orthogonale par rapport au plan* (Oxz),
   (b) ε_3 *la rotation d'axe* (Oz) *d'angle* $-\dfrac{\pi}{2}$,
   (c) ε_4 *la projection orthogonale sur le plan* (Oyz).

3.4 Application linéaire associée à une matrice

Définition 3.3 (Application canonique).
Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. *On appelle* ***application linéaire canoniquement associée*** *à la matrice* A, *l'application* $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ *telle que :*

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p,\ f(x_1, \ldots, x_p) = (y_1, \ldots, y_n),$$

avec :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j.$$

Remarque. A est la matrice de f par rapport aux bases canoniques de chacun des deux sous-espaces vectoriels.

Définition 3.4 (Image et noyau d'une matrice).
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. *On appelle :*

- ***image*** *de la matrice* A :

$$\mathrm{Im}(A) = \{AX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \ / \ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})\},$$

- ***noyau*** *de la matrice* A :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \ / \ AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\}.$$

Remarques.
Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et* f *l'application canoniquement associée à* A :

— $\mathrm{Im}(A)$ *est le sev de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ *des matrices colonnes des vecteurs de* $\mathrm{Im}(f)$;

— $\mathrm{Ker}(A)$ *est le sev de* $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ *des matrices colonnes des vecteurs de* $\mathrm{Ker}(f)$.

Exemple 3.6. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est égale à*

$$A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On se propose de déterminer le noyau de A et l'image de A.

4 Changement de bases

4.1 Matrice de passage d'une base à une autre

Définition 4.1 (Matrice de passage)**.**
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux base de E.
On appelle ***matrice de passage*** *de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$, par rapport à la base $\mathcal{B}$.*

Remarque. La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est parfois notée $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Exemple 4.1. *Soit l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^2$. On considère*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et la base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.
Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?

Proposition 4.1 (Interprétation de la matrice de passage)**.**
La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice associée à l'identité $\mathrm{Id}_E : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B})$ où E est l'espace de départ muni de la base $\mathcal{B}'$, et E est aussi l'espace d'arrivée, mais muni de la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Remarque. Faites bien attention à l'inversion de l'ordre des bases !

Proposition 4.2 (Propriétés de la matrice de passage)**.**
Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases d'un même ev. Alors :

(*i*) $\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
(*ii*) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

Exemple 4.2. *Soit $E = \mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Définissons*

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$?

Proposition 4.3 (Changement de bases).
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un même $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, et x un vecteur de E de matrices $X = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors :

$$X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times X'.$$

4.2 Formule de changement de base

Théorème 4.1 (Formule de changement de base).
Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si l'on note :

- *$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E et $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$,*
- *$\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $Q = P_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{C}'$,*
- *$A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $B = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$.*

Alors :

$$B = Q^{-1}AP.$$

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, nous obtenons une formule plus simple, le théorème 4.1 devient alors :

Corollaire (Formule de changement de base d'un endomorphisme).
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Notons $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et f un endomorphisme de E de matrices $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(f)$, alors :

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple 4.3. *Reprenons les deux bases de $\mathbf{R}^3$ de l'exemple 4.2 :*

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est :

$$A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Que vaut la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$, $B = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}_2}(f)$?

Exercices d'application. *Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x+y, 3x-2y)$, Soit $v = \binom{3}{-4} \in \mathbf{R}^2$ avec ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbf{R}^2$. Soit $\mathcal{B}_1 = \left(\binom{3}{2}, \binom{2}{2}\right)$ une autre base de $\mathbf{R}^2$.*

1. *Calculer la matrice de f dans la base canonique.*
2. *Calculer les coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique.*
3. *Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$.*
4. *En déduire les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_1$, et de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.*
5. *Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$.*

Même exercice dans $\mathbf{R}^3$ avec $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-2y, y-2z, z-2x)$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

4.3 Matrices semblables

Les matrices considérées dans ce paragraphe sont des matrices carrées de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Définition 4.2 (Matrices semblables)**.**
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que la matrice B est ***semblable*** *à la matrice A s'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

Remarques.
- *La matrice unité d'ordre n, I_n, n'est semblable qu'à elle-même.*
- *La matrice nulle d'ordre n, 0_n, n'est semblable qu'à elle-même.*
- *La relation « être semblable » est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$; on peut donc dire indifféremment que A est semblable à B ou que A et B sont semblables.*
- *Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme d'un ev de dimension finie, mais exprimé dans des bases différentes de ce même ev.*

Théorème 4.2 (Endomorphisme et matrices semblables)**.**
Si f est un endomorphisme de E et si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors les matrices $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables.

5 Rang d'une matrice

5.1 Généralités

Une matrice peut être vue comme une juxtaposition de vecteurs colonnes.

Définition 5.1 (Rang d'une matrice)**.**
On définit le ***rang*** *d'une matrice comme étant le rang de ses vecteurs colonnes.*

Exemple 5.1. *Le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbf{K})$$

est par définition le rang de la famille de vecteurs de $\mathbf{K}^2$: $\left\{ v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right), v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \right\}$. Tous ces vecteurs sont colinéaires à v_1, donc le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est 1 et ainsi $\operatorname{rg} A = 1$.

5.2 Rang et matrice inversible

Théorème 5.1 (Matrice inversible et rang)**.**
Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n.

La preuve repose sur plusieurs résultats qui seront vus au fil de ce chapitre.

Théorème 5.2 (Invariance du rang)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors $\operatorname{rg}(A \times B) = \operatorname{rg}(B \times A)$.
En particulier, deux matrices semblables ont le même rang.

5.3 Rang engendré par les vecteurs lignes

Nous admettrons le résultat suivant :

Proposition 5.1 (Propriétés fondamentales de la transposition).
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors :

(i) $rg(A^{\mathrm{T}}) = rg(A)$;

(ii) si A est inversible, alors A^{T} est inversible, de plus $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

Exercices d'application.

1. *Quel est le rang de la famille de vecteurs* $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$?
   Même question pour $\left(\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}\right)$ *en fonction du paramètre* $t \in \mathbf{R}$.
2. *Mettre sous forme échelonnée par rapport aux colonnes la matrice* $\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & -2 & -1\\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$. *Calculer son rang. Idem avec* $\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\ -2 & 1 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
3. *Calculer le rang de* $\begin{pmatrix}2 & 4 & -5 & -7\\ -1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & a & -2 & b\end{pmatrix}$ *en fonction de a et b.*
4. *Calculer les rangs précédents en utilisant les vecteurs lignes.*
5. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Quelle inégalité relie* $\mathrm{rg}(f(v_1), \ldots, f(v_p))$ *et* $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p)$ *? Que se passe-t-il si f est injective ?*