TD 24 : Applications linéaires et matrices

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, 3y - z, 5z)$.

1/ Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

2/ Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

3/ Montrer que f est un automorphisme, puis déterminer sa réciproque.

Exercice 2

Soit u l'application de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}$ définie par $u(x, y, z, t) = x - t$.

1/ Montrer que u est une forme linéaire.

2/ Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

3/ u est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 3

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$

1/ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = e_1 - e_2; f(e_2) = e_1 + e_2$. $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

2/ Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = e_1 - e_2; f(e_2) = 2e_1 - 2e_2$. $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3/ Les applications f puis g sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

Exercice 4

Soit $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = f'' - 3f' + 2f \end{array}$

Démontrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 5

Soient E un $\mathbf{K}$-e.v. et $f, g \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Im} f \subset \ker g$.
2. Comparer, au sens de l'inclusion, $\ker f$ et $\ker f^2$.
3. Comparer, au sens de l'inclusion, $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f^2$.

Exercice 6

Soient E un $\mathbf{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\} \iff \ker f^2 = \ker f$.

Solution:

on a toujours $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$.

Supposons que par hypothèse $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\}$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$, alors $f^2(x) = 0$ que l'on peut écrire $f(f(x)) = 0$, on obtient donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\, f$, mais comme par définition $f(x) \in \operatorname{Im} f$, alors $f(x) = \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ ce qui signifie que $f(x) = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker} f$. Autrement dit $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ et par suite $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, alors $f(x) = 0$ et il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$, d'où $f^2(a) = f(f(a)) = f(x) = 0$ c'est -à-dire $a \in \operatorname{Ker} f^2$. Mais comme $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$, alors $a \in \operatorname{Ker} f$. Ce qui signifie $x = f(a) = 0$ et donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

Exercice 7

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ définis par : $f\left((x, y)\right) = (y, x)$ et $g\left((x, y)\right) = (x + y, 2x)$.

On admettra que f et g sont linéaires.

1. Montrer que f et g sont des isomorphismes de $\mathbf{R}^2$ puis déterminer f^{-1} et g^{-1}.
2. On note $h = f \circ g - g \circ f$. Justifier que $h \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$.
3. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?
4. h est-elle injective ?
5. h est-elle surjective ?

Exercice 8

Soit u l'application de $E = \mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^4$ définie par :

$u\left(x, y, z, t)\right) = (2x + 9z - 9t, 2y + 3z - 3t, 5z - 3t, 6z - 4t)$.

On note id l'application identité sur $\mathbf{R}^4$.

On admettra que u est linéaire.

1. (a) Prouver que $u^2 - u - 2\mathrm{id}_E = 0_{E^E}$.
   (b) Démontrer que u est un automorphisme de $\mathbf{R}^4$.
   (Il y a au moins 5 méthodes pour le démontrer ...)
2. (a) Déterminer $\ker(u - 2\mathrm{id})$ puis $\ker(u + \mathrm{id})$.
   (b) En déduire que $E = \ker(u - 2\mathrm{id}) \oplus \ker(u + \mathrm{id})$.
3. On ne servira pas de la question 2 ; pour faire la question 3.
   (a) On pose $f = u - 2\mathrm{id}_E$ et $g = u + \mathrm{id}_E$.
   Prouver que $f \circ g = g \circ f = 0_{E^E}$.
   (b) Prouver que $E = \ker(f) \oplus \ker(g)$.

Exercice 9

Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dimension finie, V un s.e.v. de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer que : $V \subset f(V) \Rightarrow f(V) = V$.

Solution:

V étant un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie, alors il est aussi de dimension finie.

Notons $p = \dim(V)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de V.

On a $f(V) = \mathrm{Vect}\, f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)$ d'où $\dim(f(V)) \leqslant p$.

Mais par hypothèse, $V \subset f(V)$ donc $p = \dim(V) \leqslant \dim(f(V))$.

Par conséquent, $p = \dim(V) = \dim(f(V))$.

En résumé, $\dim(V) = \dim(f(V))$ et $V \subset f(V)$ d'où $V = f(V)$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\Delta : \mathbf{K}_{n+1}[X] \to \mathbf{K}_n[X]$ l'application définie par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$

1. Montrer que Δ est bien définie et que Δ est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de Δ.
3. En déduire que cette application est surjective.

Solution:

1/ Remarquons tout d'abord que si a_{n+1} est le coefficient (éventuellement nul) du monôme X^{n+1} d'un polynôme $P \in \mathbf{K}_{n+1}[X]$, alors il en sera de même pour $P(X+1)$, ce qui implique que l'on a bien $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) \in \mathbf{K}_n[X]$, donc que l'application Δ est bien définie.

On a ensuite, pour $P, Q \in \mathbf{K}_{n+1}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$:

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) + (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q),$$

d'où la linéarité de Δ.

2/ Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. On a alors :

$$\Delta(P) = 0 \iff P(X+1) = P(X).$$

On obtient ainsi $P(0) = P(1) = P(2) = \cdots = P(n+1)$, ce qui implique que le polynôme $P - P(0)$ de $E = \mathbf{K}_{n+1}[X]$ admet $n+2$ racines distinctes, donc qu'il est nul, c'est-à-dire que $P = P(0) = $ constante.

On en conclut que $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Vect}\, 1$.

Le théorème du rang nous donne alors :

$$\mathrm{rg}(\Delta) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) = n + 2 - 1 = n + 1 = \dim(\mathbf{K}_n[X]),$$

ce qui implique que Δ est bien surjective.

Exercice 11

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-e.v. E de dimension finie. Démontrer que l'on a équivalence entre :

1. $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ supplémentaires dans E
2. $E = \mathrm{Im} f + \ker f$
3. $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$
4. $\ker f^2 = \ker f$

Solution:

Nous allons procéder par implications circulaires.

- **1** $\implies$ **2** :

  cette implication découle de la définition de la somme directe.

- **2** $\implies$ **3** :

  on a vu dans l'exercice précédant que l'on a toujours $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

  Nous allons établir l'inclusion inverse à l'aide de l'hypothèse $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.

  Soit donc $x \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe alors $a \in E$ tel que $x = f(a)$.

  Or, d'après notre hypothèse, il existe donc $(b, c) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ tels que $a = b + c$.

  On a donc :

  $$x = f(a) = f(b + c) = f(b) + f(c) = f(b)$$

  puisque $f(c) = 0$. On a de plus $b \in \mathrm{Im}(f)$ d'où il existe un élément y de E tel que $b = f(y)$, ce qui nous donne alors :

  $$x = f(b) = f(f(y)) = f^2(y) \in \mathrm{Im}(f^2),$$

  ce qui montre la deuxième inclusion, donc l'égalité $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.

- **3** $\implies$ **4** :

  cette implication est immédiate car on a vu à l'exercice précédant que l'on a toujours l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$, or l'égalité des dimensions de $\mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f)$ implique, via le théorème du rang, celle de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$, ce qui montre bien que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

- **4** $\implies$ **1** :

  supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Pour montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$, vu que le théorème du rang nous donne $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$, il ne reste plus qu'à montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

  On considère donc $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. On a donc :

  $$\begin{cases} x = f(a) \\ f(x) = 0 \end{cases} \implies f^2(a) = f(f(a)) = f(x) = 0 \implies a \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f).$$

  On a donc $x = f(a) = 0$, ce qui implique que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et qui finit ainsi de monter que $E =$

$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Conclusion : on a montré que **1** $\Longrightarrow$ **2** $\Longrightarrow$ **3** $\Longrightarrow$ **4** $\Longrightarrow$ **1**, ce qui implique bien l'équivalence de ces quatre assertions.

Exercice 12

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ définie par $f((x, y, z)) = (x - y, -x + y + z, 3z)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer une base de chaque s.e.v. : $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
3. En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice D de f est diagonale.
4. Exprimer A en fonction de D. En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Solution:

Corrigé en classe

Exercice 13

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Par la méthode du pivot de Gauss, déterminer le rang de f. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Trouver une relation de dépendance entre les vecteurs colonnes de M. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer des équations cartésiennes de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Démontrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$, puis déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Solution:

1/ Il suffit de remarquer que l'on a :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pour conclure que $\mathrm{rg}(f) = 2$, puis que $((-1, 1, 1), (0, 1, 0))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2/ On a clairement $2C_1 - C_3 = C_2$, et comme le thèorème du rang nous donne $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$, on en déduit que $((2, -1, -1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3/

- Comme on a vu que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel, il suffit de trouver une équation vérifiée par les deux vecteurs de sa base. On obtient donc $\mathrm{Im}(f)$ a pour équation $x+z=0$.
- Si $u=(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f)$, alors on a :

$$\begin{cases} -x-2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$

4/

- Le théorème du rang nous donnant $\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim(\mathbf{R}^3)$, il ne reste plus qu'à montrer que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0_E\}$. Or le vecteur $(2,-1,-1)$ qui engendre $\mathrm{Ker}(f)$ ne vérifiant pas l'équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$, on a bien $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0_E\}$ et par suite $\mathbf{R}^3=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f)$.
- Si on note $\mathcal{B}=(u,v,w)$ avec $u=(-1,0,1)$, $v=(0,1,0)$ et $w=(2,-1,-1)$, alors on sait (d'après le point précédant) que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

  Il suffit alors de remarquer que $f(u)=u$, $f(v)=v$ et $f(w)=0$ pour conclure que l'on a :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14

Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)=A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, et en déduire que $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$ (sans utiliser la question suivante).
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, une base de $\mathrm{Im}(f)$, et vérifier le résultat précédent.
3. On cherche une base $\mathcal{B}=(b_1,b_2,b_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(*)$.

   Justifier que $b_2\in\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)$, puis déterminer une base $\mathcal{B}$ permettant de vérifier $(*)$.

Solution:

1/ On obtient $A^2=0$, ce qui implique que $f^2=0_{\mathcal{L}(E)}$.

On en déduit alors que, si $y\in\mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$ et donc que $f(y)=f^2(x)=0$, donc que $y\in\mathrm{Ker}(f)$. Ceci montre bien que $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$.

2/

- Si $u = (x, y, z) \in \text{Ker}(f)$, alors on a :

$$\begin{cases} 3x - 3y + 6z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff x - y + 2z = 0.$$

On en déduit que l'on a $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(1, 1, 0), (2, 0, -1) = \text{Vect}\, u, v$.

- Les trois colonnes de A étant colinéaires, alors $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f) = 1$ et on a $\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(3, 1, -1) = \text{Vect}\, w$.
- Comme on voit que $w = u + v \in \text{Ker}(f)$ (ou bien que w vérifie l'équation cartésienne de $\text{Ker}(f)$), on retrouve bien $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

3/ Supposons l'existence d'une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $f(b_1) = b_2$, ce qui implique que $b_2 \in \text{Im}(f)$ et $f(b_2) = 0$, ce qui implique que $b_2 \in \text{Ker}(f)$.

Il faut donc choisir $b_2 \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$, nous prendrons ainsi $b_2 = w = (3, 1, -1)$.

Comme b_2 est représenté par la première colonne de la matrice A, on sait que l'on a $f(1, 0, 0) = b_2$, donc on choisit $b_1 = (1, 0, 0)$.

Pour b_3, il nous faut un vecteur dont l'image est nulle, donc un vecteur de $\text{Ker}(f)$, et qui complète (b_1, b_2) en une base de $\mathbf{R}^3$, on choisira par exemple $b_3 = (1, 1, 0)$ (on aurait également pu prendre $(2, 0, -1)$).

La base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ vérifie alors $(*)$.

Exercice 15

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ défini par $f(P) = P(X + 2) + P(X) - 2P(X + 1)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Donner une base du noyau et une base de l'image de f.
3. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3[X]$ telle que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Calculer $f^3(1 + 2X - 3X^2)$.

Solution:

1/ On calcule les images des polynômes de la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ et on obtient :

$$f(1) = 0 = f(X), \quad f(X^2) = 2 \quad \underline{et} \quad f(X^3) = 6X + 4.$$

On en déduit alors :

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2/ On voit immédiatement que le rang de cette matrice vaut 2, ce qui implique, à l'aide du théorème du rang, que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

On obtient alors immédiatement que $(1, X)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et que $(2, 4 + 6X)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, ce qui implique que $(1, X)$ est également une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3/ Supposons l'existence d'une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ de $\mathbf{R}_3[X]$ telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $f(b_3) = b_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $f(b_4) = b_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

Si on choisit $b_1 = 1$ et $b_2 = X$, alors il suffit de remarquer que $f(X^2) = 2$ entraîne que $f\left(\frac{X^2}{2}\right) = 1$ pour choisir $b_3 = \frac{X^2}{2}$.

En remarquant alors que $f\left(\frac{X^3}{6}\right) = X + \frac{2}{3}$ implique que $f\left(\frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{3}\right) = X$, on choisit $b_4 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{3}$.

Il suffit alors de voir que la famille $\mathcal{B} = \left(1, X, \frac{X^2}{2}, \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{3}\right)$ est échelonnée en degrés pour conclure que c'est une base de $\mathbf{R}^3$, et elle vérifie bien, par construction, la condition demandée.

4/ Il suffit de remarquer que $\left(Mat_{\mathcal{B}}(f)\right)^2 = 0$, ou bien que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, pour conclure que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui implique que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, puis que $f^3(1 + 2X - 3X^2) = 0$.

Exercice 16

On considère trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par leurs premiers termes x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence suivantes : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(-x_n - 3y_n + 6z_n\right) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + 5y_n - 6z_n\right) \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + 3y_n - 4z_n\right) \end{cases}$

1. Démontrer que ce système peut s'écrire sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et X_{n+1}, X_n sont des matrices

colonne.

2. Déterminer $S_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) / AX = X\}$ et $S_{-2} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) / AX = -2X\}$.

3. Démontrer que S_1 et S_{-2} sont des s.e.v. de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et en déterminer des bases.

4. En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ inversible telle que : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   Calculer A^n et en déduire X^n en fonction de X_0.

Solution:

1/ Il suffit de poser :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \quad \underline{et} \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

pour que le système peut s'écrire sous la forme $X_{n+1} = AX_n$.

2/

- Soit $u = (x, y, z) \in S_1$. On obtient alors :

$$\begin{cases} 2x = -x - 3y + 6z \\ 2y = 3x + 5y - 6z \\ 2z = 3x + 3y - 4z \end{cases} \iff 3x + 3y - 6z = 0 \iff x + y - 2z = 0.$$

  On en déduit que S_1 est le sev de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$ (donc un plan vectoriel) qui admet pour base $(u, v) = ((1, -1, 0), (2, 0, 1))$.

- Soit $u = (x, y, z) \in S_{-2}$. On obtient alors :

$$\begin{cases} -4x = -x - 3y + 6z \\ -4y = 3x + 5y - 6z \\ -4z = 3x + 3y - 4z \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 3y + 6z = 0 \\ 3x + 9y - 6z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \iff y = -x = z.$$

  On en déduit que S_{-2} est le sev de dimension 1 de $\mathbf{R}^3$ (donc une droite vectorielle) qui admet pour base $(w) = ((-1, 1, 1))$.

3/ Si on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors on obtient $\det(P) = 2 \neq 0$, ce qui implique que P est inversible. Il s'agit donc d'une matrice de changement de base.

Si on note f l'endomorphisme qui admet A pour matrice sur la base canonique, alors les vecteurs u, v et w vérifient, par leur construction, $f(u)=u$, $f(v)=v$ et $f(w)=-2w$, donc on obtient bien :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $A = PDP^{-1}$, puis $A^n = PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$.

On obtient alors :

$$X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0.$$

Un calcul (par la méthode du pivot de Gauss par exemple) nous donne alors :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -(-2)^n \\ -1 & 0 & (-2)^n \\ 0 & 1 & (-2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-2)^n & -1+(-2)^n & 2+(-2)^{n+1} \\ 1+(-2)^n & 3-(-2)^n & -2-(-2)^{n+1} \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & -(-2)^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\Big[(1+(-2)^n)x_0 + (-1+(-2)^n)y_0 + (2+(-2)^{n+1})z_0\Big] \\ y_n = \dfrac{1}{2}\Big[(1+(-2)^n)x_0 + (3-(-2)^n)y_0 - (2+(-2)^{n+1})z_0\Big] \\ z_n = \dfrac{1}{2}\Big[(1-(-2)^n)x_0 + (1-(-2)^n)y_0 - (-2)^{n+1}z_0\Big] \end{cases}$$

Exercice 17

On se place dans $\mathbf{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. Soient $x_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $x_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $x_3 = -e_1 + 3e_2$ trois vecteurs.

   Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((x_1, x_2, x_3))$ matrice de la famille (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$, puis déterminer $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3)$.

2. Soient $y_1(2,1,0)$, $y_2(2,3,-2)$ et $y_3(2,-1,2)$.

   Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((y_1, y_2, y_3))$,

   puis déterminer $\mathrm{rg}(y_1, y_2, y_3)$.

Exercice 18

Écrire les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée (la linéarité sera admise) :

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-3z, x-2y-z, -x+y+3z) \end{array}$

2. $T: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP+2P' \end{array}$

3. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution:

1/ On obtient ici immédiatement :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2/ On calcule $T(X^k)$ pour $k \in \{0,1,2\}$ et on obtient :

$$T(X^0) = X \ \underline{et} \ T(X^k) = X \times X^k + 2kX^{k-1} = X^{k+1} + 2kX^{k-1} \text{ pour } k \in \{1,2\}.$$

On en déduit ainsi, pour $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$:

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3/ On définit la matrice canonique $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Si on pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\varphi(M) = AM = \begin{pmatrix} -a+b & 4a+b \\ -c+d & 4c+d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de la base canonique ayant une valeur parmi a, b, c et d égale à 1 et les autres nulles, on en déduit leurs images et on obtient :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19

Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice, dans les bases canoniques (I, J, K, L) et (i, j, k) est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit deux nouvelles bases $\mathcal{B} = (I, J, 4I + J - 3L, -7I + K + 5L)$ et $\mathcal{C} = (4i + 2j + k, 5i + j - k, k)$.

Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 20

1. Écrire la matrice de l'application linéaire suivante dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$

   (la linéarité sera admise) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-5x + 2y - z, 4x - 3y - 2z, x + y + 3z) \end{array}$$

2. Déterminer $\text{rg}(f)$, puis si f est bijective déterminer son inverse sinon déterminer $\ker(f)$.

Exercice 21

1. Écrire la matrice de l'application linéaire suivante dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$

   (la linéarité sera admise) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-3x - y + 5z, -x + 3y + 2z, 2x - 2y - 2z) \end{array}$$

2. Déterminer $\text{rg}(f)$, puis si f est bijective déterminer son inverse sinon déterminer $\ker(f)$.

Exercice 22 (exercice plus axé sur une révision du chapitre, ne pas le faire de suite)

Soit $T: \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (2X+1)P + (1-X^2)P' \end{array}$.

En utilisant le point de vue matriciel, on veut déterminer $T^{-1}(P)$ pour tout $P \in \mathbf{R}_2[X]$.

1. Prouver que T est un endomorphisme.
2. Écrire la matrice A de T dans la base canonique.
3. Prouver que T est un automorphisme et calculer A^{-1}.
4. Conclure.

Solution:

1/ La linéarité de la dérivation nous donne immédiatement la linéarité de T.

De plus, si $P = aX^2 + bX + c$, alors on a :

$$\begin{aligned} T(P) &= (2X+1)P + (1-X^2)P' = (2X+1)(aX^2+bX+c) + (1-X^2)(2aX+b) \\ &= 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX + aX^2 + bX + c + 2aX + b - 2aX^3 - bX^2 \\ &= (a+b)X^2 + (2a+b+2c)X + b + c \in \mathbf{R}_2[X], \end{aligned}$$

donc T est bien un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

2/ On déduit immédiatement du calcul précédant les images des polynômes de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et on obtient :

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3/ Comme on trouve $\det(A) = -3 \neq 0$, on en déduit immédiatement que T est un automorphisme.

Il suffit alors d'inverser A, par la méthode de Gauss par exemple, pour obtenir :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4/ On en déduit ainsi, pour $P = aX^2 + bX + c$:

$$T^{-1}(P) = \frac{(-2a+b+c) + (2a-b+2c)X + (a+b-2c)X^2}{3}.$$