TD 21 : Analyse asymptotique

Exercice 1

Déterminer un équivalent simple à chacune des suites suivantes puis calculer sa limite :

1/ $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$

2/ $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) + \dfrac{1}{n}$

3/ $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

4/ $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$.

Exercice 2

Déterminer un équivalent simple à chacune des fonctions suivantes au voisinage de a :

1. $f_1(x) = x^3 - 2x - 4$ pour $a = 0$, $a = +\infty$ et $a = 1$

2. $f_2(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x-2}$ pour $a = 0$, $a = +\infty$ et $a = 1$

Exercice 3

Déterminer les développements limités suivants :

1. En utilisant les développements limités de référence :
   (a) $DL_3(0)$ de $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$
   (b) $DL_3(0)$ de $f_3(x) = \ln(1-2x)$
2. Par opérations sur les développements limités de référence :
   (a) $DL_3(0)$ de $f_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$
   (b) $DL_3(0)$ de $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x+2x^2}$
   (c) $DL_3(0)$ de $f_2(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+2x}}$
   (d) $DL_3(0)$ de $f_3(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
   (e) $DL_4(0)$ de $f_4(x) = \dfrac{x}{\sin(x)}$
3. Avec la formule de Taylor-Young :
   $DL_3\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ de $f(x) = \ln(\cos(x))$
4. Avec un changement de variable (composition à droite) :
   $DL_3(1)$ de $f(x) = \ln(1+x^2)$
5. Avec le théorème de primitivation des développements limités :
   $DL_3(0)$ de $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

Exercice 4

Déterminer les développements limités suivants puis donner un équivalent au voisinage du point :

1. $DL_3(1)$ de $f_1(x) = x^2 \mathrm{e}^x$
2. $DL_2(0)$ de $f_2(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{2x+1}$
3. $DL_3(0)$ de $f_3(x) = \dfrac{2x+x^2}{\ln(1+x)}$
4. $DL_6(0)$ de $f_4(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$
5. $DL_3(0)$ de $f_5(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
6. $DL_2(0)$ de $f_6(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\cos(x)-x}{x-\ln(1+x)}$

Exercice 5

Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)$ dans les cas suivants :

1/ $f(x) = \dfrac{(1-\cos(x)\arctan(x))}{x\sin^2(x)}$, $a=0$

2/ $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$, $a=0$ puis $a=+\infty$.

Exercice 6

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x\ln(x)}{x-1} \end{array}$

En 1, prouver que f est prolongeable par continuité, puis déterminer si elle est dérivable ? si elle est de classe $\mathcal{C}^1$? si sa courbe admet une tangente et si oui quelle est sa position par rapport à la courbe ?

Exercice 7

Soit $f: \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \end{array}\right.$. Donner un $DL_3(2)$. Déduire la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.

Exercice 8

Déterminer les éventuelles asymptotes ainsi que les positions de ces asymptotes par rapport à la courbe de f dans les cas suivants :

1/ $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

2/ $f(x) = x\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

3/ $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.