Table des matières

Chapitre 21

Analyse asymptotique

Dans ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$.

Motivation

Dans ce chapitre, pour n'importe quelle fonction, nous allons trouver le polynôme de degré n qui approche le mieux la fonction. Les résultats ne sont valables que pour x autour d'une valeur fixée (ce sera souvent autour de 0). Ce polynôme sera calculé à partir des dérivées successives au point considéré. Sans plus attendre, voici la formule, dite formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x).$$

La partie polynomiale $f(0) + f'(0)x + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$ est le polynôme de degré n qui approche le mieux $f(x)$ autour de $x = 0$. La partie $x^n\epsilon(x)$ est le « reste » dans lequel $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 (quand x tend vers 0) et qui est négligeable devant la partie polynomiale.

Rappelons que $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1 Relations de comparaison

1.1 Cas des suites

Nous nous intéressons dans cette partie à la comparaison des suites en l'infini.

Définition 1.1 (Comparaison de suites)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Nous supposons que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

(i) *On dit que la suite (u_n) est **dominée** par la suite (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée et on note alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.*

(ii) *On dit que la suite (u_n) est **négligeable** devant la suite (v_n) si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ et on note alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.*

(iii) *On dit que la suite (u_n) est **équivalente** à la suite (v_n) si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ et on note alors $u_n \sim v_n$.*

Remarque. $u_n = \mathrm{o}(1) \implies \lim u_n = 0$.

Exemple 1.1. *Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}$. On a :*

$$\alpha > \beta \iff \frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Proposition 1.1.

(*i*) *La relation O est une transitive, ce qui signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles, alors :*

$$(u_n = \mathrm{O}(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = \mathrm{O}(w_n)) \implies u_n = \mathrm{O}(w_n)$$

(*ii*) *La relation o est une transitive, autrement dit si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles, alors :*

$$(u_n = \mathrm{o}(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = \mathrm{o}(w_n)) \implies u_n = \mathrm{o}(w_n)$$

(*iii*) *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, c.-à-d. :*
- $u_n \sim u_n$ (*réflexive*)
- $u_n \sim v_n \implies v_n \sim u_n$ (*symétrie*)
- $(u_n \sim v_n \;\; \text{et} \;\; v_n \sim w_n) \implies u_n \sim w_n$ (*transitive*).

Attention

On évite d'écrire $u_n \sim 0$ car cela signifierait que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang et pourrait aussi conduire à des absurdités.

Théorème 1.1 (Croissances comparées).

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2,\ \alpha<\beta,\ \frac{1}{n^\beta} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right); \quad \forall\alpha>0,\ \forall\beta\in\mathbf{R},\ (\ln(n))^\beta = \mathrm{o}(n^\alpha);$$
$$\forall a>1,\ a^n = \mathrm{o}(n!); \quad n! = \mathrm{o}(n^n); \quad \forall\alpha\in\mathbf{R},\quad n^\alpha = \mathrm{o}(\mathrm{e}^n).$$

Proposition 1.2.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si, et seulement si, $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$.

Proposition 1.3 (Équivalents, signes et limites).
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On a :

(*i*) $\left(u_n \sim v_n \;\; \text{et} \;\; \lim v_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}}\right) \implies \lim u_n = \ell$.
(*ii*) $\lim u_n = \ell \in \mathbf{R}^* \implies u_n \sim \ell$.
(*iii*) $u_n \sim v_n \implies (\exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \;\; \text{et} \;\; v_n \;\; \text{sont de même signe})$.

Remarque. Si $\lim u_n = \ell \in \mathbf{R}$, alors $u_n = \ell + \mathrm{o}(1)$.

Théorème 1.2 (Opérations sur les équivalents).
Soient (u_n), (u'_n), (v_n) et (v'_n) des suites réelles telles que $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors :

(*i*) $(u_n \times u'_n) \sim (v_n \times v'_n)$.
(*ii*) $\forall\alpha\in\mathbf{R},\ (u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$.
(*iii*) $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$.

Attention

Il ne faut pas sommer les équivalents.

Théorème 1.3 (Composition à gauche d'équivalents)**.**
Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles.*

(i) $\lim(u_n - v_n) = 0 \implies \mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.

(ii) $\big(u_n \sim v_n$ *et* $\lim u_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}}_+ \setminus \{1\}\big) \implies \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Exemple 1.2. $\ln(n+1) \sim \ln(n)$, $\mathrm{e}^{-n+1/n} \sim \mathrm{e}^{-n}$.

Attention

La condition $u_n \sim v_n$ n'est pas suffisante pour affirmer que $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$ ou $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
Pensez toujours aux deux contre-exemples suivants :

- $n+1 \sim n$ mais e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n.
- $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1 + \dfrac{1}{n^2}$ mais $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ n'est pas équivalent à $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

1.2 Cas des fonctions

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$, nous nous intéressons dans cette partie à la comparaison des fonctions au voisinage de a. Lorsque $a = +\infty$, les comparaisons vues dans le cas des suites s'étendent facilement aux cas des fonctions.

Définition 1.2 (Comparaison des fonctions)**.**
Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$, élément ou extrémité de I. Nous supposons que la fonction g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$ où V est un voisinage de a contenu dans I.

(i) *On dit que la fonction f est* ***dominée*** *par la fonction g si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a et on note $f = \mathrm{O}_a(g)$.*

(ii) *On dit que la fonction f est* ***négligeable*** *devant la fonction g si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ et on note alors $f = \mathrm{o}_a(g)$.*

(iii) *On dit que la fonction f est* ***équivalente*** *à la fonction g si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et on note alors $f \underset{a}{\sim} g$.*

Remarques.

— *Toutes les propriétés du o, O et $\sim$ vues dans le cas des suites s'étendent pour le cas des fonctions. On a entre autres, $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g = \mathrm{o}_a(g)$, de même si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g sont de même signe au voisinage de a.*

— *L'équivalence est compatible avec le produit, le quotient et les puissances mais pas avec la somme ou la différence,c.-à-d.$f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ n'entraîne pas $(f_1 + f_2) \underset{a}{\sim} (g_1 + g_2)$.*

Proposition 1.4 (Croissances comparées).

(*i*) *Au voisinage de* $+\infty$ *:*

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2,\ \alpha<\beta,\ \frac{1}{x^\beta}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right);\quad \forall\alpha>0,\ \forall\beta\in\mathbf{R},\ (\ln(x))^\beta=\mathrm{o}\left(x^\alpha\right);$$
$$\forall\alpha\in\mathbf{R},\ x^\alpha=\mathrm{o}\left(\mathrm{e}^x\right);\quad \forall\alpha\in\mathbf{R},\ \forall a>1,\ x^\alpha=\mathrm{o}\left(a^x\right).$$

(*ii*) *Au voisinage de* 0 *:*

$$\forall\alpha>0,\ \ln(x)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

Proposition 1.5 (Équivalents classiques).

(*i*) *Au voisinage de* 0 *:*

$$\begin{array}{lll}\sin(x)\sim x & \tan(x)\sim x & 1-\cos(x)\sim\dfrac{x^2}{2}\\ \ln(1+x)\sim x & \mathrm{e}^x-1\sim x & (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (\alpha\in\mathbf{R}^*)\\ \arctan(x)\sim x & \arcsin(x)\sim x & \mathrm{sh}(x)\sim x.\end{array}$$

(*ii*) *Si* $x\mapsto P(x)=a_nx^n+\cdots+a_px^p$ *est une fonction polynomiale réelle avec* $n>p\geqslant 0$, $a_n\neq 0$ *et* $a_p\neq 0$*. Alors :*

$$P(x)\underset{0}{\sim}a_px^p\quad\text{et}\quad P(x)\underset{\pm\infty}{\sim}a_nx^n.$$

2 Développements limités

2.1 Généralités

Définition 2.1 (Développement limité).
Soient f une fonction réelle définie sur l'intervalle I et a est un point de I ou une extrémité de I. On dit que f admet un ***développement limité*** *à l'ordre n au point a et on note $DL_n(a)$, s'il existe un polynôme $P\in\mathbf{R}_n[X]$ tel que pour h au voisinage de 0 :*

$$f(a+h)=P(h)+\mathrm{o}\left(h^n\right).$$

Autrement dit :

$$f(a+h)=a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+\mathrm{o}\left(h^n\right).$$

- *Le terme $a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n$ s'appelle* ***partie principale*** *du $DL_n(a)$.*
- *Le terme $\mathrm{o}\left(h^n\right)$ est appelé le* ***reste*** *du $DL_n(a)$.*

Remarque. En posant $x=a+h$, le $DL_n(a)$ de f s'écrit encore sous la forme :

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\mathrm{o}_a\left((x-a)^n\right).$$

Exemple 2.1. *Le $DL_n(0)$ de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ est donné par :*

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right),\ \text{pour } x \text{ voisin de } 0.$$

En effet, on peut écrire $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ *et on vérifie facilement que* $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \mathrm{o}\left(x^n\right)$ *au voisinage de* 0.

Proposition 2.1 (Unicité de la partie régulière).
Si f admet un $DL_n(a)$ alors sa partie régulière est unique.

Corollaire (Développement limité d'une fonction paire ou impaire).
Si f est paire (resp. impaire) alors la partie régulière de son développement limité en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Proposition 2.2 (Troncature d'un $DL_n(a)$).
Si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière P, alors pour tout entier naturel $k \in [\![0, n]\!]$, f admet un $DL_k(a)$ de partie régulière P_k obtenu par troncature de P au degré k .

Exemple 2.2. *Le $DL_n(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est :*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right), \text{ pour } x \text{ voisin de } 0.$$

Donc le $DL_2(0)$ de f est $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ au voisinage de 0. Ce développement limité a été obtenu par troncature de la partie régulière au degré 2.

Remarque.

1. L'unicité du DL et la formule de Taylor-Young prouve que si l'on connaît le DL et que f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors on peut calculer les nombres dérivés à partir de la partie polynomiale par la formule $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Cependant dans la majorité des cas on fera l'inverse : on trouve le DL à partir des dérivées.
2. Si f admet un DL en un point a à l'ordre $n \geq 0$ alors f est continue en a et $c_0 = f(a)$.
3. Si f admet un DL en un point a à l'ordre $n \geq 1$, alors f est dérivable en a et on a $c_0 = f(a)$ et $c_1 = f'(a)$. Par conséquent $y = c_0 + c_1(x-a)$ est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.
4. Plus subtil : f peut admettre un DL à l'ordre 2 en un point a *sans* admettre une dérivée seconde en a. Soit par exemple $f(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x}$. Alors f est dérivable mais f' ne l'est pas. Pourtant f admet un DL en 0 à l'ordre 2 : $f(x) = x^2\epsilon(x)$ (la partie polynomiale est nulle).

2.2 Formule fondamentale

Théorème 2.1 (Formule de Taylor-Young).
Soient $n \in \mathbf{N}$, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

Remarque. Si l'on pose $x = a + h$, alors :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}_a\left((x-a)^n\right).$$

Cas particulier : Formule de Taylor-Young au voisinage de 0**.** On se ramène souvent au cas particulier où $a = 0$, la formule de Taylor-Young s'écrit alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2.3 DL des fonctions usuelles à l'origine

En appliquant la formule de Taylor-Young aux fonctions usuelles au voisinage de 0, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)\\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right),
\end{aligned}$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}_+$. Il en découle de ce dernier développement limité :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)\ \text{(ici } \alpha = -1)\\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)\ \text{(ici } \alpha = \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

Remarque. Ils sont tous à apprendre par cœur. Il faut retenir la propriété suivante, dans le développement limité au voisinage de 0 d'une fonction f paire (resp. impaire) il n'y a que des monômes de degré pair (resp. impair) et le premier terme de ce développement limité est $f(0)$.

Exercices d'application.

1. *Écrire le DL en 0 à l'ordre 3 de* $\sqrt[3]{1+x}$. *Idem avec* $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.
2. *Écrire le DL en 1 à l'ordre 2 de* $\sqrt{x}$.

3 Opérations sur les développements limités

3.1 Somme et produit

Soient f et g deux fonctions définies sur I et admettant chacune un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point $a \in I$:

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)\ \text{ et }\ g(a+h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

Proposition 3.1 (Somme et produit de DL)**.**

- *Pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda f + g$ *admet un* $DL_n(a)$ *:*

$$(\lambda f + g)(a+h) = (\lambda a_0 + b_0) + (\lambda a_1 + db_1)h + \cdots + (\lambda a_n + b_n)h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

- $f \times g$ *admet un* $DL_n(a)$ *dont la partie régulière est obtenue en tronquant au degré* n *le produit des parties régulière de* f *et* g *:*

$$(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n) \times (b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n).$$

Exemple 3.1. *Calculer le DL de* $\cos x \times \sqrt{1+x}$ *en* 0 *à l'ordre* 2.

Exercices d'application.

1. *Écrire le* $DL_n(0)$ *de* $\operatorname{ch} x$ *et* $\operatorname{sh} x$.
2. *Écrire le* $DL_5(0)$ *de* $\cos(x)\,\mathrm{e}^x$.

3.2 Composition

Proposition 3.2 (Composition de DL)**.**
Soit f *une fonction définie sur* I *et qui admet un développement limité à l'ordre* n *au point* $a \in I$ *:*

$$f(a+h) = P(h) + \mathrm{o}\left(h^n\right) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

Soit g *une fonction définie sur un intervalle* J *et qui admet un développement limité à l'ordre* n *au point* $b \in J$ *:*

$$g(b+h) = Q(h) + \mathrm{o}\left(h^n\right) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

Si $f(a) = b$, *alors* $g \circ f$ *admet un* $DL_n(a)$ *dont la partie régulière est obtenue en tronquant au degré* n *:*

$$Q(P) = b_0 + b_1 P + \cdots + b_n P^n.$$

Exemple 3.2.

1. *Calcul du* $DL_n(0)$ *de* $\dfrac{1}{1-x}$.
2. *Calcul du* $DL_{2n}(0)$ *de* $\dfrac{1}{1+x^2}$.
3. *Calcul du* $DL_3(0)$ *de* $h(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$.
4. *Calcul du* $DL_4(0)$ *de* $h(x) = \sqrt{\cos(x)}$.
5. *Calcul du* $DL_5(0)$ *de* $\tan(x)$ *en* 0.
6. *Calcul du* $DL_4(0)$ *de* $\dfrac{1+x}{2+x}$.
7. *Calcul du* $DL_4(0)$ *de* $\dfrac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)}$.

3.3 Dérivation et primitivation

Proposition 3.3 (Intégration terme à terme)**.**
Soient f admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière P, F une primitive de f et Q la primitive de P telle que $Q(0) = F(0)$. Alors, F admet un $DL_{n+1}(0)$ de partie régulière Q. Autrement dit, on intègre la partie régulière du DL de f terme à terme pour obtenir le DL de $F(x)$ à la constante $F(a)$ près.

Exemple 3.3.

1. *Déterminer le* $DL_n(0)$ *de* $\ln(1 + x)$.
2. *Déterminer le* $DL_{2n+1}(0)$ *de* $\arctan x$.
3. *Déterminer le* $DL_5(0)$ *de* $\arcsin x$.

Corollaire (Dérivation)**.**
Soit f admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière P, alors f' admet un $DL_{n-1}(0)$ de partie régulière P'.

4 Applications des développements limités

On va présenter quelques exemples d'applications des développements limités.

4.1 Calculs d'équivalents et de limites

Proposition 4.1 (Équivalents - Limites)**.**
Soit f une fonction admettant un $DL_n(a)$ dont la partie régulière est non nulle :

$$f(a + h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right).$$

Alors :

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a + h) = a_0$.

(ii) $f(a+h) \sim_0 a_p h^p$ *c'est-à-dire* $f(x) \sim_a a_p(x-a)^p$*, où p est le plus petit entier naturel tel que* $a_p \neq 0$.

Exemple 4.1.

1. *Déterminer un équivalent de* $\mathrm{e}^x - 1 - x$ *au voisinage de* 0.
2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$.
3. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$.

4.2 Étude locale d'une fonction

Proposition 4.2 (Prolongement - Position par rapport à la tangente).
Soit f une fonction admettant un $DL_n(a)$ ($n \geqslant 2$) dont la partie régulière est non nulle :

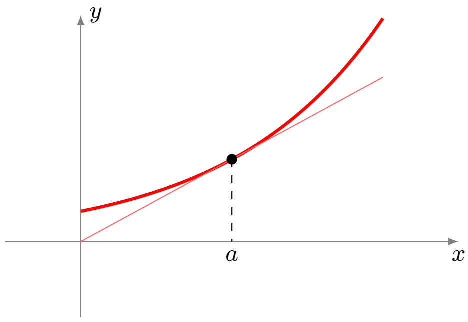
$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \mathrm{o}(h^n).$$

Alors :

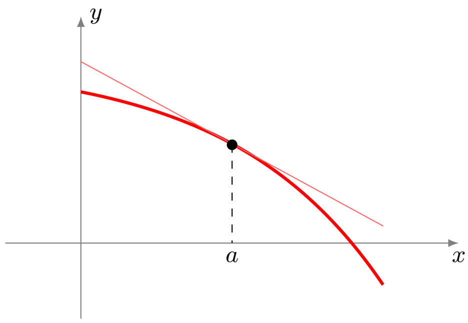
(i) *f se prolonge par continuité en a en une fonction g tel que $g(a) = a_0$.*
(ii) *Le prolongement par continuité de f est dérivable en a et vérifie $g'(a) = a_1$.*
(iii) *L'équation de la tangente à la courbe de f en a est $y = a_0 + a_1(x-a)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x voisin de a est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$ avec $f(x) - y \sim_a a_p(x-a)^p$.*

Il y a 3 cas possibles.

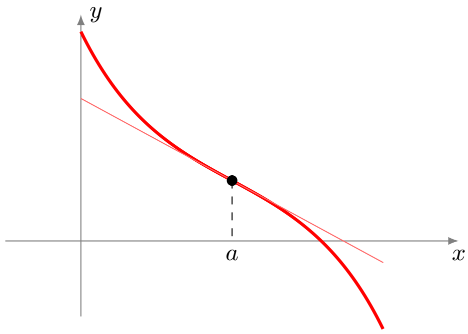
— Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.



— Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.



— Si ce signe change (lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$) alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. C'est un **point d'inflexion**.



Exemple 4.2.

Soit $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$. *Déterminant un équivalent de f en 0, f est-*

elle prolongeable par continuité en 0 *? Étudier la dérivabilité de ce prolongement en* 0. *Enfin, déterminer la tangente à la courbe de* f *au point d'abscisse* 0, *puis la position de la courbe de* f *par rapport à cette tangente lorsque* x *est voisin de* 0.

4.3 Recherche d'asymptotes

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$ où $I =]-\infty, x_0[$.

Proposition 4.3 (Asymptotes).
Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \dfrac{a_p}{x^p} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$ *avec* $p \in \mathbf{N}^*$ *et* $a_p \neq 0$ *alors* $y = a_0 + a_1 x$ *est l'équation de l'asymptote à la courbe de* f *au voisinage de l'infini ; la position de cette asymptote par rapport à la courbe est déterminée par le signe de* $\dfrac{a_p}{x^p}$.

Exemple 4.3. *Etude de l'asymptote de la courbe de* f *définie par* $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.

Exemple 4.4. *Asymptotes de* $f(x) = \exp\dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$.