

TD 21 : Analyse asymptotique

Exercice 1

Déterminer un équivalent simple à chacune des suites suivantes puis calculer sa limite :

1/ $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

3/ $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2/ $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$

4/ $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$.

Solution:

1/ $u_n \sim \frac{1}{n^2}$, 2/ $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$, 3/ $u_n \sim \frac{1}{n}$, 4/ $u_n \sim e^{-\sqrt{n}-\frac{1}{2}}$.

Exercice 2

Déterminer un équivalent simple à chacune des fonctions suivantes au voisinage de a :

1. $f_1(x) = x^3 - 2x - 4$ pour $a = 0$, $a = +\infty$ et $a = 1$

2. $f_2(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-2}$ pour $a = 0$, $a = +\infty$ et $a = 1$

Solution:

1/ $f_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -4$ $f_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$ $f_1(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -5$ $f_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$
2/ $f_2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x}$ $f_2(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{3(x-1)}$

Exercice 3

Déterminer les développements limités suivants :

1. En utilisant les développements limités de référence :

(a) $DL_3(0)$ de $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

(b) $DL_3(0)$ de $f_3(x) = \ln(1-2x)$

2. Par opérations sur les développements limités de référence :

(a) $DL_3(0)$ de $f_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

(b) $DL_3(0)$ de $f_1(x) = \frac{1}{1+x+2x^2}$

(c) $DL_3(0)$ de $f_2(x) = e^{\sqrt{1+2x}}$

(d) $DL_3(0)$ de $f_3(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

(e) $DL_4(0)$ de $f_4(x) = \frac{x}{\sin(x)}$

3. Avec la formule de Taylor-Young :

$DL_3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $f(x) = \ln(\cos(x))$

4. Avec un changement de variable (composition à droite) :

$DL_3(1)$ de $f(x) = \ln(1+x^2)$

5. Avec le théorème de primitivation des développements limités :

$DL_3(0)$ de $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Solution:

1. En utilisant les développements limités de référence :

(a) $f_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^3)$

(b) $f_3(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$

2. Par opérations sur les développements limités de référence :

(a) $f_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^3)$

(b) $f_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x - x^2 + 3x^3 + o(x^3)$

(c) $f_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e + ex + \frac{e}{6}x^3 + o(x^3)$

(d) $f_3(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{19}{48}x^3 + o(x^3)$

(e) $f_4(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$

3. Avec la formule de Taylor-Young :

$f(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}{=} -\ln(2) - \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)$

4. Avec un changement de variable (composition à droite) :

$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \ln(2) + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$

5. Avec le théorème de primitivation des développements limités :

On calcule $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2+2x}{3}}}$ et en utilisant le $DL_3(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1+u}}$, il vient :

$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{6\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{9\sqrt{3}}x^3 + o(x^3)$

Exercice 4

Déterminer les développements limités suivants puis donner un équivalent au voisinage du point :

1. $DL_3(1)$ de $f_1(x) = x^2 e^x$

2. $DL_2(0)$ de $f_2(x) = \frac{x e^x}{2x+1}$

3. $DL_3(0)$ de $f_3(x) = \frac{2x + x^2}{\ln(1+x)}$
4. $DL_6(0)$ de $f_4(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$
5. $DL_3(0)$ de $f_5(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$
6. $DL_2(0)$ de $f_6(x) = \frac{e^x \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}$

Solution:

1. $f_1(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} e + 3e(x-1) + \frac{7e}{2}(x-1)^2 + \frac{13e}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$
2. $f_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + \frac{5}{2}x^3 + o(x^3)$
3. $f_3(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + 2x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$
4. $f_4(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{11}{5}x^5 + o(x^6)$
5. $f_5(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + \frac{21\sqrt{2}}{1024}x^3 + o(x^3)$
6. $f_6(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$

Exercice 5

Calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dans les cas suivants :

1/ $f(x) = \frac{(1 - \cos(x) \arctan(x))}{x \sin^2(x)}$, $a = 0$

2/ $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$, $a = 0$ puis $a = +\infty$.

Solution:

1/ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$ 2/ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \longmapsto \frac{2x \ln(x)}{x-1}$$

En 1, prouver que f est prolongeable par continuité, puis déterminer si elle est dérivable ? si elle est de classe C^1 ? si sa courbe admet une tangente et si oui quelle est sa position par rapport à la courbe ?

Solution:

Le $DL_2(1)$ de f est $f(x) = 2 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{3} + o((x-1)^2)$.

Conclusion :

- f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = 2$;
- ce prolongement par continuité en 1 est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$, elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ en 1.
- La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est d'équation $y = 2 + (x - 1)$.
Comme $f(x) - (2 + (x - 1)) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{(x-1)^2}{3} < 0$, alors la courbe de f est au-dessous de sa tangente en ce point.

Exercice 7

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Donner un $DL_3(2)$. Déduire la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.

$$x \longmapsto x(1 + e^{-x})$$

Solution:

$$\text{Le } DL_3(2) : f(x) = \frac{2e^2 + 2}{e^2} + \frac{e^2 - 1}{e^2} \cdot (x - 2) + \frac{1}{6e^2} (x - 2)^3 + o((x - 2)^3).$$

Conclusion :

- La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est d'équation $y = \frac{2e^2 + 2}{e^2} + \frac{e^2 - 1}{e^2} \cdot (x - 2)$.
- Comme $f(x) - \left(\frac{2e^2 + 2}{e^2} + \frac{e^2 - 1}{e^2} \cdot (x - 2) \right) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \frac{1}{6e^2} (x - 2)^3$, alors la courbe de f est au-dessous de sa tangente en ce point si $x \rightarrow 2^-$ et elle est au-dessus de sa tangente en ce point si $x \rightarrow 2^+$.

Exercice 8

Déterminer les éventuelles asymptotes ainsi que les positions de ces asymptotes par rapport à la courbe de f dans les cas suivants :

$$1/ f(x) = \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$2/ f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$3/ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Solution:

$$1/ f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x - 1 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ donc } y = x - 1 \text{ est une équation de l'asymptote de la courbe de } f \text{ quand } x \rightarrow \pm\infty.$$

Comme $f(x) - (x - 1) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{5}{2x}$, alors la courbe de f est au-dessus de son asymptote quand $x \rightarrow +\infty$ et au-dessous de son asymptote quand $x \rightarrow -\infty$.

$$2/ f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ donc } y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} \text{ est une équation de l'asymptote de la courbe de } f \text{ quand } x \rightarrow \pm\infty. \text{ Comme } f(x) - \left(\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}\right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{4x}, \text{ alors la courbe de } f \text{ est au-dessus de son asymptote quand } x \rightarrow +\infty \text{ et au-dessous de son asymptote quand } x \rightarrow -\infty.$$

$$3/ f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ donc } y = x + \frac{1}{2} \text{ est une équation de l'asymptote de la courbe de } f \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

Comme $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$, alors la courbe de f est au-dessus de son asymptote quand $x \rightarrow +\infty$.

$f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $y = -x - \frac{1}{2}$ est une équation de l'asymptote de la courbe de f quand $x \rightarrow -\infty$.
Comme $f(x) - \left(-x - \frac{1}{2}\right) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{3}{8x}$, alors la courbe de f est au-dessus de son asymptote quand $x \rightarrow -\infty$.