Matrice échelonnée

Exercice 1 *Indiquer, parmi les matrices suivantes, lesquelles sont échelonnées, échelonnées réduites.*

$$① \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ② \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ③ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$④ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ⑤ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ⑥ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 *A l'aide du Pivot de Gauß, donner une matrice échelonnée équivalente à M et préciser le rang de M lorsque*

$$① \ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad ② \ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ③ \ M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$④ \ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ⑤ \ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \qquad ⑥ \ M = \begin{pmatrix} m & 1 & 5 \\ -1 & 1 & m \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \ m \in \mathbb{R}$$

Systèmes linéaires sans paramètres

Exercice 3 *Résoudre, avec la méthode du pivot de Gauß, les systèmes suivants :*

$$① \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 6x + 5y = 1 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} 2x + 4y - 4z = 8 \\ 3x + 9y - 6z = 9 \\ 4x + 17y - 11z = 1 \end{cases} \qquad ③ \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2y - 6z = 9 \end{cases}$$

$$④ \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ x + y - 2z = 4 \\ x - 3y - 4z = 10 \end{cases} \qquad ⑤ \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + 2z + t = 1 \end{cases} \qquad ⑥ \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \\ 2x + y + t = 1 \end{cases}$$

Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 4 *Résoudre et discuter en fonction des paramètres les systèmes suivants :*

$$① \begin{cases} x - 3y + 7z = a \\ x + 2y - 3z = b \\ 7x + 4y - z = c \end{cases} \qquad ② \begin{cases} (1-m)\,x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3+m)\,y + 3z = 0 \\ x + y - (2+m)\,z = 0 \end{cases} \qquad ③ \begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

$$④ \begin{cases} (4-m)\,x + 2y = -4 \\ -x + (1-m)\,y = m \end{cases} \qquad ⑤ \begin{cases} ax + ay = m \\ a^2x + a^2y = m^2 \end{cases} \text{ où } a \neq 0 \qquad ⑥ \begin{cases} x + my + mz = m \\ mx + y + mz = 1 \\ mx + my + z = m \end{cases}$$

Exercice 5 *A quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$, le système suivant est-il compatible ?*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = a \\ x - y - z = 1 \\ 3x + y + 4z = -1 \end{cases}$$

On ne demande pas de le résoudre.

Exercice 6 *Justifier que le système*

$$\begin{cases} mx + y + mz = 2m \\ x + my + z = 2 \\ mx + y - mz = 0 \end{cases}$$

est toujours compatible.

Exercice 7 *Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & \lambda y & + & \lambda^2 y & = & 0 \\ \overline{\lambda} x & + & y & + & \lambda z & = & 0 \\ \overline{\lambda}^2 x & + & \overline{\lambda} y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}$$

Exercice 8 *Résoudre les systèmes*

$$① \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & my & - & mz & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et } ② \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & a \\ x & + & y & - & z & = & b \\ x & + & my & - & mz & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 9 *Pour $n \geq 2$, résoudre le système donné par* $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = (i-1) + x_i$.

Exercice 10 *Pour $n \geq 2$, résoudre le système donné par* $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, x_i + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Exercice 11 *Dans le plan, on se donne n points $A_1, \cdots, A_n$, on cherche à déterminer s'il existe n points $M_1, \cdots, M_n$ tels que A_i soit le milieu de $[M_i, M_{i+1}]$ (en posant $M_{n+1} = M_1$) ? On note $a_1, \cdots, a_n$ et $z_1, \cdots, z_n$ les affixes des points $A_1, \cdots, A_n, M_1, \cdots M_n$ respectivement. On convient que $z_{n+1} = z_1$.*

1. *Traduire à l'aide de a_i, z_i et z_{i+1} le fait que A_i soit le milieu de $[M_i, M_{i+1}]$.*
2. *Ecrire le système vérifié par les inconnues $z_1, \cdots, z_n$. Préciser la matrice M de ce système.*
3. *Calculer le rang de M, quelle condition doit vérifier n pour qu'il existe toujours une unique solution ?*
4. *On se place dans le cas $n = 4$, quelle condition doivent vérifier les quatre points pour qu'il existe au moins une solution. Dans ce cas, cette solution est-elle unique ? Préciser également un procédé de construction de la solution.*
5. *Pour $n = 3$ justifier qu'il existe une unique solution et donner une construction de la solution.*