EXERCICE 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & a \\ 1 & 2 & -3 & b \\ 7 & 4 & -1 & c \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & a \\ 0 & 5 & -10 & b-a \\ 0 & 25 & -50 & c-7a \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & a \\ 0 & 5 & -10 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-5b \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 1/5 L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & a \\ 0 & 1 & -2 & (b-a)/5 \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-5b \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & (2a+3b)/5 \\ 0 & 1 & -2 & (b-a)/5 \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-5b \end{array}\right)$$

A partir de là, une discussion s'impose :

- Si $c - 2a - 5b \neq 0$, le système de rang 2 n'a pas de solution.
- Si $c-2a-5b = 0$, le système (toujours de rang 2) a une infinité de solutions. La variable z devenant une inconnue auxiliare. L'ensemble des solutions s'écrivant

$$S = \left\{ \left(-z + \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b, 2z - \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

EXERCICE 2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-m & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -m-3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -m-2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m-2 & 0 \\ -2 & -m-3 & 3 & 0 \\ 1-m & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$ *(Cela permet d'avoir un premier pivot sans paramètre, discussion repoussée.)*

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + (m-1)L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m-2 & 0 \\ 0 & -m-1 & -2m-1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1-m-m^2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m-2 & 0 \\ 0 & -1-m & -2m-1 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2-3m & 0 \end{array}\right)$$

▷ Si $m \neq -1$,

$$(S_m) \underset{L_2 \leftarrow -1/(m+1) L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m-2 & 0 \\ 0 & 1 & (2m+1)/(m+1) & 0 \\ 0 & 0 & -m^2-3m & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -(m^2+5m+3)/(m+1) & 0 \\ 0 & 1 & (2m+1)/(m+1) & 0 \\ 0 & 0 & -m^2-3m & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m \in \{-3, 0\}$, la dernière ligne de la matrice associée à (S_m) est nulle et (S_m) est de rang 2. La variable z devient une inconnue auxiliaire. L'ensemble S_m des solutions s'écrit :

$$S_m = \left\{ \left(\frac{m^2+5m+3}{m+1} z, -\frac{2m+1}{m+1} z, , z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

▷ Si $m \notin \{-3, -1, 0\}$, (S_m) est de rang 3, il n'y a plus d'inconnue auxiliaire et la dernière équation donne $z = 0$. La remontée donne alors $y = 0$ et $x = 0$ et $S_m = \{(0, 0,)\}$

▷ Si $m = -1$, $(S_{-1}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

on obtient un système échelonné de rang 2. On obtient $z = 0$ et $x = -y$, il y a donc une infinité de solutions.
$S_{-1} = \{(-y, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$

EXERCICE 3 :

On utilise la méthode du pivot de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1, L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a obtenu une matrice échelonnée par lignes. Il faut donc à présent la réduire. On part du dernier pivot (qui vaut déjà 1, sinon il faudrait le normaliser par une opération élémentaire), et on élimine les coefficients de sa colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3, L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on passe au deuxième pivot que l'on normalise et l'on élimine les coefficients de sa colonne :

$$\underset{L_2 \leftarrow 1/2 L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, on obtient la matrice réduite échelonnée par lignes équivalente à la mtatrice de départ.

EXERCICE 4 :

EXERCICE 5 :

EXERCICE 6 :