Borne supérieure et inférieure

Exercice 1 *Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup A \leq \sup B$.*
2. *Montrer que $\sup(A \cup B)$ existe et le déterminer en fonction de $\sup A$ et de $\sup B$.*
3. *Montrer que $A \cap B$ est majoré, que dire de $\sup(A \cap B)$.*

Exercice 2 *Determiner si elles existent les bornes supérieures et inférieures de*

$$① \; A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \qquad ② \; A = \left\{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}, \; (n,p) \in \mathbb{N}^2\right\} \qquad ③ \; A = \left\{\frac{p^2}{n^2 + 2p}, \; (n,p) \in \mathbb{N}^2\right\}$$

Exercice 3 *Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définir*

$$\begin{aligned} -A &= \{-a, a \in A\}, \; A + B = \{a + b, a \in A \text{ et } b \in B\} \\ \alpha + A &= \{\alpha + a, \; a \in \mathbb{R}\} \text{ et } AB = \{ab, a \in A \text{ et } b \in B\} \end{aligned}$$

1. *Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$, $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, $\sup(\alpha + A) = \alpha + \sup(A)$.*
2. *A-t-on $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$?*

Exercice 4 *Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, on déinit $B = \left\{|x - y|, (x,y) \in A^2\right\}$. Montrer que $\sup B$ existe et que $\sup B = \sup A - \inf A$.*

Exercice 5 *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante, on pose $A = \{x \in [0,1], \; x \leq f(x)\}$.*

1. *Montrer que A est non vide, en déduire que $x_0 = \sup(A)$ existe.*
2. *Montrer que $\forall x \in A, \; x \leq f(x_0)$ et en déduire que $x_0 \in A$*
3. *Montrer que $f(x_0) \in A$, et en déduire que $f(x_0) = x_0$.(On dit que x_0 est un point fixe de f)*

Partie entière

Exercice 6 *Soit $x \in \mathbb{R}$ comparer $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor -x \rfloor$.*

Exercice 7 *Soient x et y deux réels, montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$. On posera $a = x - \lfloor x \rfloor$ et $b = y - \lfloor y \rfloor$, en précisant dans quel(s) intervalle(s) se trouvent a et b.*

Exercice 8 *Calculer, pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $\left\lfloor \dfrac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor$.*

Exercice 9 *Soit la fonction f définie par $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$.*
Calculer $f(x)$ pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$ puis pour $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \; 0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$.

Exercice 10 *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n + 1$.*

Exercice 11 *Soit x un réel, et n un entier supérieur ou égal à 1, montrer que $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.*

Exercice 12 *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(1 + \sqrt{3}\right)^n + \left(1 - \sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{N}$, en déduire $\left\lfloor \left(1 + \sqrt{3}\right)^n \right\rfloor$.*

Exercice 13 *Soit x un réel, on a défini les valeurs décimales approchées de x par $d_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $D_n = u_n + 10^{-n}$. Montrer que les suites $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.*

Exercice 14 *Montrer que $\forall n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$, en déduire la valeur de $\left\lfloor \displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{k}} \right\rfloor$.*

Exercice 15 *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$

Exercice 16 *Montrer que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, *en déduire que* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ *il existe* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *tel que* $a \leq x \leq b$.

Exercice 17 *Calculer* $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, *en déduire qu'il existe deux irrationnels* a *et* b *tels que* $a^b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 18 *Soient* $x \in \mathbb{R}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$ *tels que* $x \notin \mathbb{Q}$ *et* $ab - bc \neq 0$. *Montrer que* $\dfrac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 19

1. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *croissante telle que si* $x \in \mathbb{Q}$ *alors* $f(x) = x$, *montrer que* $f = Id_{\mathbb{R}}$.
2. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *monotone telle que* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *Montrer que* f *est de la forme* $f(x) = \alpha x$ *où* α *est une constante.*

Suites classiques

Exercice 20 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique telle que* $u_p = q$ *et* $u_q = p$, *que vaut* u_{p+q} *?*

Exercice 21 *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ *et*

$$\forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_0$$

Montrer qu'elle est géométrique, en déduire u_n.

Exercice 22 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = 2u_n + 1$, *donner l'expression de* u_n *en fonction de* n.

Exercice 23 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites définies par* $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ *et*

$$u_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

On pose $z_n = u_n + iv_n$, *déterminer la relation de récurrence vérifiée par* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *En déduire les expressions de* u_n, v_n *puis leur limite.*

Exercice 24 *On considère la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_0 \in \left]0, +\infty\right[$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. *Etudier la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. *En déduire une expression de* u_n *en fonction de* n, *puis un équivalent de* u_n *quand* n *tend vers l'infini.*
3. *Mêmes questions avec* $(u_n)_n$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+nu_n}$.

Exercice 25 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites déterminées par* $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

1. *Etudier la suite* $(v_n - u_n)_n$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmético-géométrique.*
3. *En déduire les expressions de* u_n *et* v_n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 26 *Montrer que si une suite arithmétique composée d'entiers naturels contient un carré, elle en contient une infinité.*

Exercice 27 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de nombres strictements positifs. Calculer*

$$\frac{1}{u_0u_1}+\frac{1}{u_1u_2}+\cdots+\frac{1}{u_{n-1}u_n} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{u_0}+\sqrt{u_1}}+\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}$$

Exercice 28 *On définit pour* $n\geq 2$, $u_n=\prod_{k=2}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$. *Soit* $v_n=u_n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, *monter que* $(v_n)_n$ *est géométrique, en déduire* u_n *et la convergence de* $(u_n)_{n\geq 2}$.

Exercice 29 *On considère l'échiquier arithmétique infini suivant rempli ainsi :*

a) $A(0,n)=n+1$ *pour* $n\geq 0$
b) $A(m,0)=A(m-1,1)$ *pour* $m\geq 1$
c) $A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1))$ *pour* m *et* $n\geq 1$

Calculer $A(4,4)$. *(Indication : calculer* $A(1,n)$, $A(2,n)$, $A(3,n)$ *).*

Exercice 30 *On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0=0$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{2+u_n}$.

1. *Justifier que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et que* $u_n\geq 0$.
2. *Résoudre l'équation* $x=\dfrac{1+x}{1+x}$, *on notera* $\ell_1<\ell_2$ *les deux solutions.*
3. *On pose* $v_n=\dfrac{u_n-\ell_1}{u_n-\ell_2}$, *calculer* v_{n+1} *en fonction de* v_n. *En déduire* v_n *puis* u_n *et sa limite.*

Exercice 31 *On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0=0$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.

1. *Justifier que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et que* $u_n\in[-1,0]$.
2. *Résoudre l'équation* $x=\dfrac{x-1}{x+3}$, *on notera* ℓ *l'unique solution.*
3. *On pose* $v_n=\dfrac{1}{u_n-\ell}$, *calculer* v_{n+1} *en fonction de* v_n. *En déduire* v_n *puis* u_n *et sa limite.*

Exercice 32 *On définit deux suites réelles* (x_n) *et* (y_n) *par :* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ *et pour tout* $n\geq 0$, $x_{n+1}=-\dfrac{x_n+y_n}{\sqrt{2}}$ *et* $y_{n+1}=\dfrac{x_n-y_n}{\sqrt{2}}$
Montrer que la suite $(z_n=x_n+iy_n)$ *est géométrique. En déduire les expressions de* x_n *et* y_n *et la nature des suites.*

Exercice 33 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle bornée telle que* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{2n}=2u_n-1$.

1. *Pour* $p\in\mathbb{N}$, *on définit la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $v_n=u_{2^np}$. *Calculer* v_n *en fonction de* u_p.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante égale à* 1.

Suites d'ordre 2

Exercice 34 *Déterminer l'expression de* u_n *dans les cas suivants :*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0=2,\ u_1=1$ *et* $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0=0,\ u_1=2$ *et* $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0=1,\ u_1=-1$ *et* $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$

Exercice 35 *Dans le plan complexe, on considère deux point A et B. On construit la suite de point $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $M_0 = A$, $M_1 = B$ et M_{n+2} est le milieu de $[M_n, M_{n+1}]$. Quel est la "limite" de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*

Exercice 36 *Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par*

$$\begin{aligned} u_0 &= 0,\ u_1 = 1 - a \\ u_{n+2} &= 2u_{n+1} + \left(a^2 - 1\right) u_n \end{aligned}$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n en fonction du paramètre a réel.

Exercice 37 *On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \sqrt{\dfrac{u_{n+1}^9}{u_n^4}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et calculer u_n en fonction de n.*

Exercice 38 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par*

$$u_0 = -1,\ u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n + 3$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$. Déterminer v_n en fonction de n puis u_n. Comment doit-on choisir u_1 pour que $\dfrac{u_n}{n}$ ait une limite finie ?

Exercice 39 *Soit $n \geq 0$, on désire prouver que, pour tout entier n, $v_n = \left\lfloor \left(2+\sqrt{3}\right)^n \right\rfloor$ est un entier impair.*

1. *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier pair.*
2. *Justifier que $v_n = u_n - 1$ et conclure.*

Exercice 40 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe deux suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = u_n A + v_n A^2$. Déterminer u_n, v_n en fonction de $n \geq 1$. Quelle valeurs de u_0 et v_0 est-il logique de choisir ?*

Exercice 41 *Soit $\theta \in [0, \pi]$, On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence*

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2\cos\theta \\ u_{n+2} &= 2\cos\theta u_{n+1} - u_n \end{aligned}$$

Déterminer u_n en fonction de n. En déduire que $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ est un polynôme en $\cos\theta$.

Exercice 42 *Soit f une bijection de $[0, 1]$ dans lui même telle que*

$$\forall x \in [0,1],\ f(2x - f(x)) = x$$

Soit $u_0 \in [0, 1]$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et en déduire f.