Manipulation sur les limites

Exercice 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$.

1. *Montrer que* $k < 1 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. *Montrer que* $k > 1 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*

Exercice 3 *Montrer qu'une suite réelle non majorée admet une sous suite divergente.*

Exercice 4 *On désire prouver que la suite $(c_n)_n$ définie par $c_n = \cos n$ diverge. On raisonne par l'absurde, on note c sa limite.*

1. *Développer c_{n+1} et en déduire que la suite $(s_n)_n$ définie par $s_n = \sin n$ converge aussi. Quelle relation relie sa limite s avec c ?*
2. *A l'aide des suites de rangs pairs extraites des suites $(c_n)_n$ et $(s_n)_n$ aboutir à une contradiction.*

Exercice 5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Exercice 6 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant $u_n + v_n + w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3a$ et $u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3a^2$. Montrer que ces trois suites convergent vers a.*

Exercice 7 *Théorème de Césaro (Classique).*

1. *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente vers l alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \geq 1$, $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge aussi vers l.*
2. *Lemme de l'escalier : Montrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que $w_{n+1} - w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ alors $\dfrac{w_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.*
3. *Applications.*
   (a) *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k}$. Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre u_n et u_{n+1}, étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa nature. Montrer que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$, en déduire un équivalent de u_n.*
   (b) *Si (u_n) est une suite de réels strictements positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l > 0$, montrer que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Déterminer alors les limites des suites $u_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ et $v_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.*
   (c) *Montrer que si (u_n) est bornée et si la suite (d_n) définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$ est croissante alors (u_n) est convergente.*

Exercice 8 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$.*

1. *Montrer que* $\dfrac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. *On suppose que $\dfrac{u_n}{1+u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Est-ce encore vrai si on enlève l'hypothèse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée ?*

Théorème d'encadrement

Exercice 9 *Montrer que les suites de termes général suivant convergent vers zéro*

① $\dfrac{(-1)^n \sin^2 n}{n^2}$ ② $\dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{\sqrt{n}n^{k+1}}$ $k \in \mathbb{N}$ ③ $\dfrac{1^k - 2^k + \cdots + (-1)^{n+1}n^k}{\sqrt{n}n^{k+1}}$ $k \in \mathbb{N}$ ④ $\dfrac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^3}$

⑤ $\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$ ⑥ $\dfrac{n!}{n^n}$ ⑦ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$ ⑧ $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} ke^{-k}$

Exercice 10 *Limite de*

$$① \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \qquad ② \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 11 *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par*

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + ... + \frac{n}{n^2+2n} + \frac{n}{n^2+2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(2n+2)}{(n+1)^2} \leq u_n \leq \dfrac{2n+2}{n}$. *En déduire la limite de $(u_n)_n$.*

Exercice 12 *On note pour* $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ *et* $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.
2. *En déduire la nature de* $(S_n)_n$, $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *ainsi qu'un équivalent de* S_n

Exercice 13 *Montrer que* $\forall x \geq 0,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$. *On pose alors pour* $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ *et* $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. *Montrer que les deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent.*

Exercice 14

1. *Soit (u_n) une suite vérifiant*
$$\exists k \in \left]0,1\right[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}| \leq k\,|u_n|$$
Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. *On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{1}{8+2u_n}$. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. ***Si*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, quelle est sa limite l ? Montrer alors que* $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leq \dfrac{1}{32}\,|u_n - l|$ *et conclure.*
3. *Donner un exemple de suite telle qu'il existe* $k \in \mathbb{R}^+$ *vérifiant* $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}| \leq k\,|u_n|$ *et qui ne converge pas.*
4. *Plus technique : Soit (u_n) une suite telle que* $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ *avec* $0 \leq l < 1$, *montrer que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 15 *On définit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par* $u_1 = 3$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$. *Etudier cette suite.*

Exercice 16 *On définit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par* $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1. *Montrer que* $\forall x \geq 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. *En déduire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Théorème de la limite monotone

Exercice 17 *Suites monotones : Déterminer la nature des suites de terme général :*

$$① \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad ② \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad ③ \prod_{k=0}^{n} \left(1+e^{-k}\right) \qquad ④ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Pour (2) , *(utiliser* $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$*). Pour* (3) , $\ln(1+x) \leq x$ *et pour* (4) , $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^k}$ *si* $k \geq ...$

Exercice 18 *On définit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. *Etudier cette suite.*

Exercice 19 *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *définie par* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$ *est convergente.*

Exercice 20 *On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$. *Préciser la monotonie de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et en déduire sa limite.*
2. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq 2 + u_{n+1} - u_n$ *puis que* $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$.
3. *En déduire que* $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Suites adjacentes

Exercice 21 *Suites adjacentes : Montrer que les suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont adjacentes :*

$$① \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}. \qquad ② \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

Exercice 22 *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ *et* $u_n = S_{2n}$, $v_n = S_{2n+1}$.
Montrer que les suites $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont adjacentes. En déduire la convergence de* $(S_n)_n$.

Exercice 23 *Suites adjacentes : Montrer que les suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont adjacentes :*

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ *et* $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} + \frac{1}{n^{p-1}}$ *avec* p *entier fixé,* $p > 1$.
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ *et* $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln(n)$ *et* $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln(n)$. *On pourra faire des études de fonctions pour l'étude des monotonies*

Exercice 24 *Soient* a *et* b *deux réels strictement positifs tels que* $a < b$. *On définit deux suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *par* $u_0 = a$, $v_0 = b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}$ *et* $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. *Montrer que ces deux suites sont adjacentes, calculer leur limite.*

Exercice 25 *Soient* u_0 *et* v_0 *deux réels positifs tels que* $u_0 < v_0$, *on définit deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par les relations de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

Etudier ces deux suites.

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 26 *On veut étudier étudier la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_0 \in [-2, +\infty[$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. *Déterminer* α *tel que* $\alpha = f(\alpha)$ *où* $f(x) = \sqrt{2+x}$. *Montrer que si* $u_0 \geq \alpha$, *alors* $\forall n$, $u_n \geq \alpha$ *et que la suite est décroissante. Montrer que si* $u_0 \leq \alpha$, *alors* $0 \leq u_n \leq \alpha$ *si* $n \geq 1$ *et la suite est décroissante à partir du rang* 1. *Conclure.*

Exercice 27 *On veut étudier étudier la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_0 \in]0, +\infty[$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \dfrac{1}{u_n})$. *Montrer que pour* $n \geq 1$, *on a* $u_n \geq 1$ *et étudier la monotonie de* $(u_n)_{n\geq 1}$ *et conclure.*

Exercice 28 *On veut étudier étudier la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. *Etudier la monotonie et conclure.*

Suites implicites

Exercice 29 *On considère l'équation* (E) $x^n - x - 1 = 0$ *où* $n \geq 3$, *on pose* $f(x) = x^n - x - 1$

1. *A l'aide du binôme de Newton, montrer que* $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$
2. *En déduire que* (E) *admet une solution dans l'intervalle* $\left[1, 1 + \dfrac{1}{n}\right]$, *on note* x_n *cette solution. Montrer que* $(x_n)_n$ *converge vers* 1. *Sans utiliser la monotonie de* f, *comment prouver l'unicité de* x_n ?
3. *A l'aide de* $n\ln(x_n) = \ln(1+x_n)$ *montrer que* $x_n = 1 + \dfrac{\ln(2)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *(i.e.* $x_n - 1 \sim \frac{\ln(2)}{n}$*).*

Exercice 30 *Montrer que l'équation* $x - e^{-x} = n$ *admet une unique solution* u_n *dans l'intervalle* $[n, n+1]$. *Donner un développement asymptotique à deux termes de* u_n.

Exercice 31 *Soit* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, *montrer que l'équation* $\ln(x) = \dfrac{x^2}{n}$ *admet deux solutions* $u_n < v_n$. *Etudier les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Donner la limite* ℓ *de* u_n *et un équivalent de* $u_n - \ell$.

Exercice 32 *Pour tout entier* $n \geq 1$, *on définit* $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \cdots + X^2 + X - 1$

1. *Montrer que* P_n *admet une unique racine positive notée* x_n, *et que* $0 \leq x_n \leq 1$.
2. *Déterminer le signe de* $P_{n+1}(x_n)$ *et en déduire la monotonie puis la nature de* $(x_n)_{n\geq 1}$.
3. *Déterminer la limite de* (x_n) *(Indication : Montrer que* $x_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et modifier l'écriture de* P_n*).*
4. *On pose* $u_n = x_n - \dfrac{1}{2}$, *montrer pour* $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2^n}$, *puis que* $u_n \sim \dfrac{1}{2^{n+2}}$ *(Question* $^{(**)}$*).*

Exercice 33 *Soit* $n \geq 2$, *montrer que l'équation* $x^n = x + n$ *admet une unique solution positive* u_n. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, préciser sa limite* ℓ. *Donner un équivalent de* $u_n - \ell$.

Suites complexes

Exercice 34 *Soit* $a \in \mathbb{C}$. *Etudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite* $z = (z_n)_{n\geq 0}$ *définie par :* $z_0 = a$ *et, pour tout* $n \geq 0$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2z_n - \overline{z}_n)$.*(indication :* $z_n = x_n + iy_n$ *...)*

Exercice 35 *Expliciter le terme général de la suite* (u_n) *définie par :* $\theta \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = e^{i\theta}u_n + \sin\theta$.

Exercice 36 *On définit la suite complexe* (z_n) *par :* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall n \geq 0$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

1. *Etudier cette suite lorsque* z_0 *est réel.*
2. *On suppose désormais que* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *et on pose* $z_0 = re^{i\theta}$ *avec* $r = |z_0|$ *et* $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. *Pour tout* $n \geq 0$, *on pose* $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ *avec* $r_n = |z_n|$ *et* $\theta_n = \arg z_n$ *dans* $]-\pi, \pi[$. *Exprimer* z_{n+1} *et* r_{n+1} *à l'aide de* z_n *et* r_n.
3. *En déduire que :* $\forall n \geq 0$, $r_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin\frac{\theta}{2^n}}$ *et* $\theta_n = \dfrac{\theta}{2^n}$.
4. *Montrer que la suite* (z_n) *converge vers un réel strictement positif à déterminer.*

Exercice 37 *Etudier les suites réelles* (a_n) *et* (b_n) *définies par :* $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\forall n \geq 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}$ *et* $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{a_n^2 + b_n^2}$.