EXERCICE 1 :

Compte-tenu de la relation d'équivalence, on évalue

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!}\right) + \frac{n!}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \quad (\bigstar)$$

Il suffit de prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!}$, et $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, $\displaystyle\frac{k!}{n!} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$. On peut donc écrire l'encadrement suivant

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} &\leqslant \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \\ &\leqslant \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par utilisation du théorème des gendarmes, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ d'où d'après } (\bigstar), \ \frac{\sum_{k=1}^{n} k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et par suite } \boxed{\sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!}.$$

EXERCICE 2 :

Puisque $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\forall n \geqslant n_0, \ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \text{ qui sécrit aussi } |u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n|$$

Ceci grâce à la définition de la limite d'une suite ($\epsilon = \frac{1}{2}$).

On montre aisément par récurrence que

$$\forall n \geqslant n_0, \ |u_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-n_0}}|u_{n_0}|$$

Or $\displaystyle\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par comparaison $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

EXERCICE 3 :

1. $\forall x \in]-1; +\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x$, on a donc
$$\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \text{ et } \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k) \quad \text{pour } k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$
Ainsi
$$H_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \Rightarrow H_n \geqslant \ln(n+1).$$
Ce qui permet de conclure que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Comme $n(u_{n+1} - u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,
$$n(u_{n+1} - u_n) \geqslant \frac{1}{2}$$
On peut écrire alors

$$u_{n+1} - u_N = (u_{n+1} - u_n) + (u_n - u_{n-1}) + \ldots + (u_{N+1} - u_N) = \sum_{k=N}^{n} u_{k+1} - u_k$$

$$\text{et donc } u_{n+1} - u_N \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k} \Rightarrow u_{n+1} - u_N \geqslant \frac{1}{2}(H_n - H_{N-1})$$

$$\text{On écrit alors } u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}(H_n - H_{N-1}) + u_N$$

L'utilisation d'un théorème de comparaison permet de conclure que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc comme (u_{n+1}) est une suite extraite de (u_n), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

EXERCICE 4 :

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Pour tout n, $\quad 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   En effet $\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{2}{2\sqrt{n}}$ et $\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{2}{2\sqrt{n+1}}$.

2. Compte-tenu de l'inégalité précédente $S_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2$.
   Avec l'utilisation du théorème de comparaison, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$.
   Pour tout n, $S_n - 2\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geqslant -2$ donc (u_n) est minorée.
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant 0$ (cf Q.a) donc (u_n) est décroissante.
   Ainsi (u_n) converge.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2\sqrt{n} + u_n$. Or comme (u_n) converge, $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. On peut donc écrire que $u_n = \mathrm{o}(\sqrt{n})$.
   On reporte et l'on obtient $S_n = 2\sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n})$ et $2\sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n}) \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ donc $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

EXERCICE 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1. La fonction inverse est décroissante sur $[p, p+1]$, donc $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{p} = \frac{1}{p}$.
   L'autre partie de la double inégalité s'obtient avec un raisonnement comparable. Ainsi pour tout $p > 1$,
   $$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
   On applique le résultat précédent à $p = n + k$, pour $n \geqslant 1$:
   $$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
   et en effectuant la somme des « double-inégalités »
   $$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant S_n \leqslant \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

puis $\displaystyle\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$ et $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$, de plus $\displaystyle\int_{n}^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(2)$.

On en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$ (*théorème des gendarmes*)

2. $S'_{2n} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right) - 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right)$, que l'on peut écrire

$$S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = S_n$$

Par unicité de la limite d'une suite, $S'_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Dans le même temps, $S'_{2n+1} = S'_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$ donc $S'_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$. Les deux suites extraites (S'_{2n}) et (S'_{2n+1}) convergent vers la même limite $\ln(2)$, donc (S'_n) tend vers $\ln(2)$.