Séries telescopiques et géométriques

Exercice 1 *Convergence et calcul de la somme de*

$$① \sum_{n\geq 0}\frac{2^{n-2}}{3^{n+2}} \quad ② \sum_{n\geq 0}\frac{2^n+1}{4^n} \quad ③ \sum_{n\geq 0}\frac{2^n+3^n}{6^n} \quad ④ \sum_{n\geq 0}\frac{(1+i)^n}{(1+2i)^n}$$

Exercice 2 *Convergence et calcul de la somme de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\operatorname{ch} n}{4^n}$.

Exercice 3 *Soit* $r\in\,]-1,+1[$, *nature et calcul de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n\cos(n\theta)$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n\sin(n\theta)$.

Exercice 4 *Soit* $x=0,12121212\cdots$ *et* $y=2,01515\cdots$, *donner* x *et* y *sous forme de fraction.*

Exercice 5 *Convergence et calcul de la somme des séries*

$$① \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \quad ② \sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad ③ \sum_{n\geq 1}\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$$

$$④ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n} \quad ⑤ \sum_{n\geq 2}\frac{3n+2}{n(n^2-1)} \quad ⑥ \sum_{n\geq 1}\frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}$$

Exercice 6 *Une série des restes :*

1. *Montrer que pour* $n\geq 4$, *on a* $n!\geq 2^n$, *en déduire la nature de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$.

2. *On pose alors* $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$, *montrer que* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}R_n$ *converge. On pourra prouver que pour* $k\geq n+1\geq 1$, *on a* $\displaystyle\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{n!\times(n+1)^{k-n}}$.

Séries à termes positifs - Séries de Riemann - Séries ACV

Exercice 7 *Soit* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ *une série à termes positifs, étudier la nature de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{1+u_n}$ *en fonction de celle de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$.

Exercice 8 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites réelles telles que* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq v_n\leq w_n$. *Montrer que si* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}w_n$ *convergent alors* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ *aussi.*

Exercice 9 *Soit* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_n$ *une série à termes positifs convergente.*

1. *Montrer que la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_{2n}$ *converge.*

2. *Montrer que pour* u *et* v *positifs, on a* $0\leq\sqrt{uv}\leq\dfrac{u+v}{2}$. *En déduire que la série de terme géneral* $u_n=\sqrt{a_na_{2n}}$ *converge.*

Exercice 10 *Nature des séries*

$$① \sum_{n\geq 0}\frac{\sin^2 n}{2^n} \quad ② \sum_{n\geq 0}\frac{\arctan(n)\operatorname{sh}(n)}{5^n} \quad ③ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)2^n} \quad ④ \sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n$$

$$⑤ \sum_{n\geq 0}\frac{\sin(n^2)}{2^n} \quad ⑥ \sum_{n\geq 1}\frac{i^n}{n^2} \quad ⑦ \sum_{n\geq 1}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n(n+1)} \quad ⑧ \sum_{n\geq 1}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{\sin t}{t^3}dt$$

Exercice 11 *Nature des séries*

① $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln(1+e^{-n})$ ② $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+2}\right)$ ③ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2\ln\left(n^3+3\right) - 3\ln\left(n^2+2\right)$

④ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ ⑤ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$ ⑥ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}\right)$

⑦ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ⑧ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n^3+1}}$ ⑨ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+2}\right)$

Exercice 12 *Soit* $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$, *nature de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} I_n$.

Exercice 13 *Soit pour* $n \geq 0$, $I_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^{\pi} x(\sin(nx) + n\pi\cos(nx))dx$, *calculer* I_n, *nature de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} I_n$ *et calcul de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} I_n$.

Exercice 14 *Soit* $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \ln(n)$, *montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge.*

Exercice 15 *Nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \alpha\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ *en fonction de* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 *Nature de la série de terme général* $u_n = \cos\left(\arctan n + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ *où* $\alpha > 0$.

Exercice 17 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $u_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$, *nature de* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 18 *Convergence et calcul de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$ *en fonction de* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 19 *Pour* $n \geq 1$, *on pose* $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$, *justifier l'existence de* u_n, *puis donner la nature de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 20 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^*$, *on pose* $u_n = \dfrac{1}{n^{2\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}}$

1. *Pour* $\alpha > 1$, *donner la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.
2. *Pour* $\alpha \leq 1$, *quelle est la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ *?*

Exercice 21 *Pour* $n \geq 1$, *on pose* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, *nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$.

Exercice 22 *A l'aide d'une comparaison série intégrale donner la nature de*

① $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ ② $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\alpha(n)}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$ ③ $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \cdots + \ln^2 n}$ ④ $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(n!)}{n^3\ln n}$

Exercice 23 *A l'aide d'une comparaison série-intégrale déterminer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} (3k-1)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 24 *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $p(n)$ *le nombre de chiffres de l'écriture décimale de* n. *Donner un encadrement de* $p(n)$. *Soit* a *un réel avec* $a > 1$, *quelle est la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{na^{p(n)}}$ *?*