Recherche d'asymptotes

Exemple 1

On pose $\boxed{f(x) = \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}}$. On désire étudier le comportement de $f(x)$ lorsque $x \to \pm\infty$ (limite, équivalent, courbe asymptote simple, position locale par rapport à cette asymptote).

- Lorsque $x \to \pm\infty$, on a $e^{\frac{1}{x}} \to 1$, d'où l'équivalent : $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

  On pose alors $g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{x}{2}} = \dfrac{2(1+\frac{1}{x})}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{2(1+u)}{1+e^u} = h(u) \to 1$, où $u = \dfrac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

  On cherche alors un développement limité de cette quantité, lorsque $u \to 0$, par exemple à l'ordre 2 ($\mathrm{DL}_2(u \to 0)$, l'ordre dépendant de la situation et de ce qu'on cherche).

- $\mathrm{DL}_2(u \to 0)$ de $h(u) = \dfrac{2(1+u)}{1+e^u} = \dfrac{2(1+u)}{2+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)} = (1+u)\dfrac{1}{1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}+o(u^2)}$

  d'où $h(u) = (1+u)\left(1 - \left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{u^2}{4}\right) + \left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{u^2}{4}\right)^2\right) + o(u^2) = (1+u)\left(1 - \dfrac{u}{2} + 0\right) + o(u^2)$.

  Finalement : $h(u) = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$.

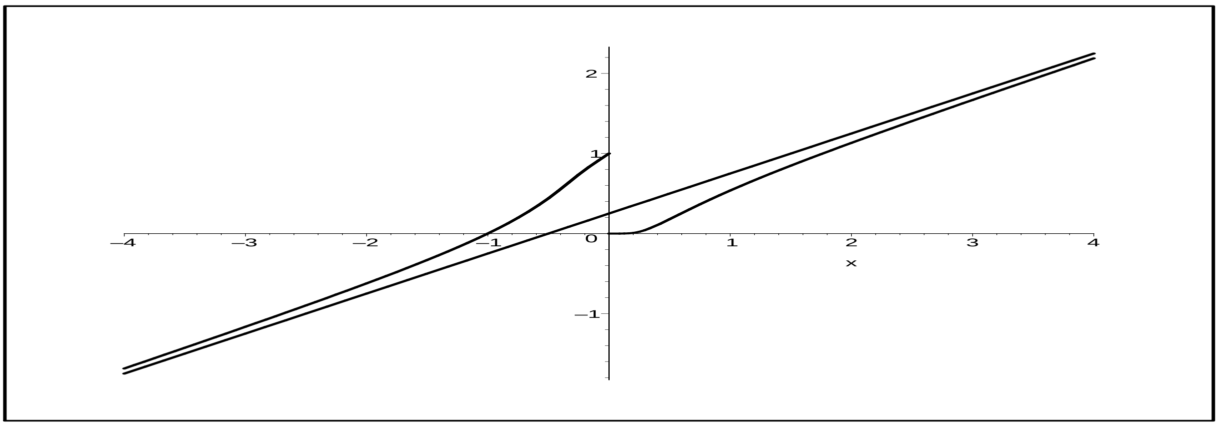
  On revient «en x» : $\dfrac{f(x)}{\frac{x}{2}} = 1 + \dfrac{(\frac{1}{x})}{2} - \dfrac{(\frac{1}{x})^2}{2} + o((\dfrac{1}{x})^2) = 1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$.

  Puis : $f(x) = \dfrac{x}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})\right) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4x} + o(\dfrac{1}{x})$.

- On a obtenu le développement asymptotique de $f(x)$ lorsque $x \to \pm\infty$ (ici, on peut aussi parler de développement limité en l'infini, d'ordre 1). Il est du type : $\boxed{f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4x} + \underset{\pm\infty}{o}(\dfrac{1}{x})}$.

  On en tire les renseignements suivants :
  - Tout d'abord : $\left[f(x) - \left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)\right] \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. La droite Δ, d'équation «$y = \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$» est asymptote pour Γ, la courbe représentative de f, au voisinage de $\pm\infty$.
  - Puisque deux fonctions équivalentes en un point a ont le même signe au voisinage de ce point, on en déduit $\left[f(x) - \left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)\right] \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4x} \begin{cases} < 0 & \text{au voisinage de } +\infty \\ > 0 & \text{au voisinage de } -\infty \end{cases}$.

    D'où les positions : Δ/Γ au $\mathcal{V}(+\infty)$ et Γ/Δ au $\mathcal{V}(-\infty)$.



Exemple 2

Soit $\boxed{f(x)=\sqrt{1+x+x^2}}$, définie sur $\mathbb{R}$ (car, pour tout réel x, $1+x+x^2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$). On désire étudier son comportement en $\pm\infty$. Tout d'abord, $(1+x+x^2)\underset{\infty}{\sim}x^2$, donc $f(x)\underset{\infty}{\sim}\sqrt{x^2}=|x|$.

- Pour l'instant, prenons $x>0$ pour l'étude au $\mathcal{V}(+\infty)$. On a $f(x)\underset{+\infty}{\sim}x$.

  On pose $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{1+u+u^2}=h(u)\to 1$ avec $u=\dfrac{1}{x}\underset{x\to\pm+\infty}{\longrightarrow}0$. On cherche un DL$_2(u\to 0)$ de $h(u)$.

  $h(u)=\sqrt{1+(u+u^2)}=1+\dfrac{1}{2}\left(u+u^2\right)-\dfrac{1}{8}\left(u+u^2\right)^2+o(u^2)=1+\dfrac{1}{2}u+\dfrac{3}{8}u^2+o(u^2)$.

  Donc : $\dfrac{f(x)}{x}=1+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+o\left((\dfrac{1}{x})^2\right)$, d'où $\boxed{f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8x}+\underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

  <u>Conséquences</u> : $f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{3}{8x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

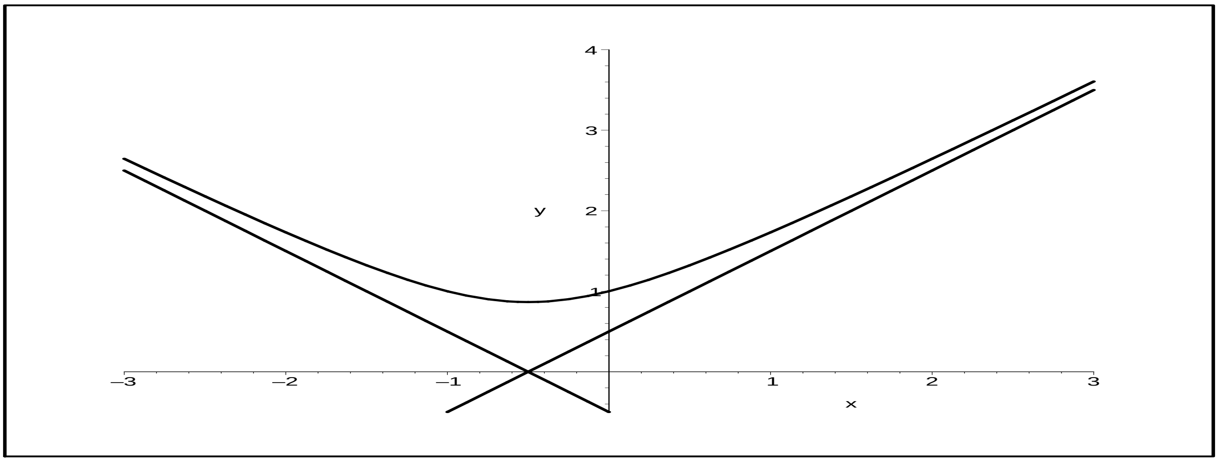
  La droite Δ, d'équation «$y=x+\dfrac{1}{2}$» est asymptote pour Γ, la courbe représentative de f, au voisinage de $+\infty$. De plus $\left[f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{3}{8x}>0$ au voisinage de $+\infty$, d'où la position Γ/Δ au $\mathcal{V}(+\infty)$.

- De même, avec $x<0$, au $\mathcal{V}(-\infty)$: $\dfrac{f(x)}{-x}=\dfrac{f(x)}{|x|}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{8}x^2+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

  D'où $\boxed{f(x)=-x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{8x}+\underset{-\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

  <u>Conséquences</u> : $f(x)-\left(-x-\dfrac{1}{2}\right)\underset{x\to-\infty}{\sim}-\dfrac{3}{8x}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0$.

  La droite Δ', d'équation «$y=-x-\dfrac{1}{2}$» est asymptote pour Γ, la courbe représentative de f, au voisinage de $-\infty$. De plus $\left[f(x)-\left(-x-\dfrac{1}{2}\right)\right]\underset{x\to-\infty}{\sim}-\dfrac{3}{8x}>0$ au voisinage de $-\infty$, d'où la position Γ/Δ' au $\mathcal{V}(-\infty)$.



Exemple 3

Soit $\boxed{f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = x \times x^{\frac{1}{x}} = x \times e^{\frac{\ln x}{x}}}$, définie sur $]0, +\infty[$.

On sait $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{<<} x$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^{\frac{1}{x}}) = 1$. Par conséquent : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.
MAIS cela ne signifie pas qu'il existe une droite asymptote d'équation «$y = x + a$» !
En effet, pour l'instant, on peut juste affirmer $(f(x) - x) \underset{+\infty}{\sim} o(x)$...

Mais $f(x) - x = x\left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right) = x\left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)$ où $\dfrac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On pose $u = \dfrac{\ln x}{x} \to 0$.

Ainsi : $e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 = e^u - 1 = u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$.

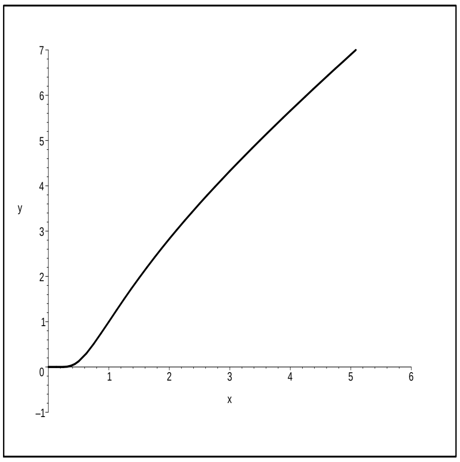
Par conséquent : $f(x) - x = x\left[\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 + o\left(\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right)\right]$, d'où l'on tire

$$\boxed{f(x) = x + \ln x + \frac{\ln^2(x)}{2x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{\ln^2(x)}{x}\right)}.$$

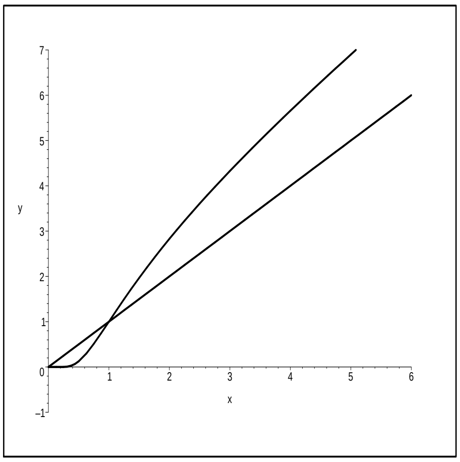
Autre présentation : $\dfrac{f(x)}{x} = e^{\frac{\ln x}{x}} = 1 + \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2}{2} + o\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$, avec $u = \dfrac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en les renseignements suivants :

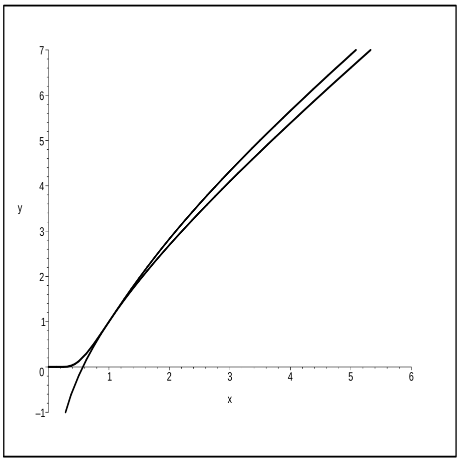
- Tout d'abord : $[f(x) - x] \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc : pas de droite asymptote, mais présence d'une branche infinie dans la direction «$y = x$» (la courbe Γ s'éloigne infiniment de cette droite lorsque $x \to +\infty$).
- $[f(x) - (x + \ln(x)] \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(x)}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$. La courbe $\mathcal{C}$ d'équation «$y = x + \ln(x)$» est asymptote pour Γ : au $\mathcal{V}(+\infty)$, elles se rapprochent l'une de l'autre, avec Γ au dessus.



$y = f(x)$ seul



$y = f(x)$ et $y = x$



$y = f(x)$ et $y = x + \ln(x)$

Exemple 4

Soit $\boxed{f(x)=\sqrt{x^4-x^2+x-1}-(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.
Problème pour l'ensemble de définition de f : le polynôme $p(x)=x^4-x^2+x-1$ peut changer de signe sur $\mathbb{R}$, et on va avoir des difficultés à trouver ses racines... Mais on a, au voisinage de $\pm\infty$, $(x^4-x^2+x-1)\sim x^4>0$ et $(x^2+1)\sim x^2>0$, ce qui assure l'existence de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (i.e on est certain que l'ensemble de définition de f contient des intervalles du type $]A,+\infty[$ et $]-\infty,B[$, ce qui suffit pour justifier l'étude d'asymptotique de f ! Merci les équivalents.

En l'infini : $\sqrt{x^4-x^2+x-1}\underset{\infty}{\sim}\sqrt{x^4}=x^2$ et $(x+1)\sqrt{x^2+1}\underset{\infty}{\sim}x\sqrt{x^2}=x|x|$.

En factorisant, on a $f(x)=x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}-x|x|\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

- <u>Etude en $-\infty$</u> : on a, avec $x<0$ et $|x|=-x$, $f(x)=x^2\left[\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]$,

d'où $\boxed{f(x)\underset{-\infty}{\sim}2x^2}$.

Posons $g(x)=\dfrac{f(x)}{2x^2}=h(u)=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1-u^2+u^3-u^4}+(1+u)\sqrt{1+u^2}\right]$ avec $u=\dfrac{1}{x}\underset{x\to\pm-\infty}{\longrightarrow}0$.

On cherche un DL$_3(u\to 0)$ de $h(u)$. Pour rappel : DL$_3(t\to 0)$ de $\sqrt{1+t}=1+\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{t^3}{16}+o(t^3)$.
C'est parti !

$h(u)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{(-u^2+u^3-u^4)}{2}-\frac{(-u^2+u^3-u^4)^2}{8}+\frac{(-u^2+u^3-u^4)^3}{16}+(1+u)(1+\frac{u^2}{2}-\frac{(u^2)^2}{8}+\frac{(u^2)^3}{16})\right]+o(u^3)$

ce qui revient à $h(u)=\dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{(-u^2+u^3+0)}{2}-\dfrac{(0)}{8}+\dfrac{(0)}{16}+(1+u)\left(1+\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{(0)}{8}+\dfrac{(0)}{16}\right)\right]+o(u^3)$

donc $h(u)=\dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{-u^2}{2}+\dfrac{u^3}{2}+\left(1+\dfrac{u^2}{2}\right)+\left(u+\dfrac{u^3}{2}\right)\right]+o(u^3)=\dfrac{1}{2}\left[2+u+u^3\right]+o(u^3)$.

Ainsi $h(u)=1+\dfrac{u}{2}+\dfrac{u^3}{2}+o(u^3)$, et «en revenant en x» : $\dfrac{f(x)}{2x^2}=1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

D'où l'on tire le développement asymptotique de $f(x)$ au voisinage de $-\infty$:

$$\boxed{f(x)=2x^2+x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}\qquad \text{DA}(-\infty)$$

<u>Conséquences</u> : on a $\left[f(x)-(2x^2+x)\right]\underset{-\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0^-$. Donc la parabole $\mathcal{P}$ d'équation «$y=x^2+x$» et la courbe Γ (représentative de f) sont asymptotes au voisinage de $-\infty$, avec la position locale $\mathcal{P}/\Gamma$ ($\mathcal{P}$ au dessus de Γ au $\mathcal{V}(-\infty)$).

- <u>Etude en $+\infty$</u> : on a, avec $x>0$ et $|x|=+x$, $f(x)=x^2\left[\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}-\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]$,

d'où, pour l'instant, impossibilité de trouver un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ car on a
$f(x)=x^2\times[\varepsilon(x)]$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$. On peut juste affirmer $\boxed{f(x)\underset{+\infty}{\sim}o(x^2)}$.

Pour plus de précision, on cherche un développement, lorsque $x\to+\infty$ et $u=\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, de la quantité $\varepsilon(x)=\left[\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right]=k(u)$

où $k(u)=\sqrt{1-u^2+u^3-u^4}-(1+u)\sqrt{1+u^2}$.

On cherche un DL$_4(u \to 0)$: pourquoi à l'ordre 4 et non pas 3 ? Réponse à la fin du calcul !!!

Pour rappel : DL$_4(t \to 0)$ de $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} + o(t^4)$.

Comme précédemment, on trouve :

$k(u) = \left[1 + \frac{(-u^2+u^3-u^4)}{2} - \frac{(-u^2+0)^2}{8} + \frac{(0)^3}{16} - \frac{5(0)^3}{128} - (1+u)(1 + \frac{u^2}{2} - \frac{(u^2)^2}{8} + \frac{(0)^3}{16} - \frac{5(0)^4}{128})\right] + o(u^4)$

puis $k(u) = \left[1 + \frac{(-u^2+u^3-u^4)}{2} - \frac{u^4}{8} - (1 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{8}) - (u + \frac{u^3}{2} - 0)\right] + o(u^4)$

ainsi $k(u) = -u - u^2 - \frac{u^4}{2} + o(u^4)$, puis, «en revenant en x» : $k(u) = \varepsilon(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.

On rappelle : $f(x) = x^2 \times \varepsilon(x)$ d'où le développement asymptotique de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{f(x) = -x - 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{DA}(+\infty).$$

Conséquences : on a $[f(x) - (-x-1)] \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$.

Donc la droite Δ d'équation «$y = -x - 1$» et la courbe Γ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$, avec la position locale Δ/Γ (Δ au dessus de Γ au $\mathcal{V}(+\infty)$).

Explication de l'ordre 4 : dans le DL$(u \to 0)$ de $k(u)$, le terme de degré 3 est nul. Si on avait calculé un DL$_3(u \to 0)$, on aurait juste trouvé le DA de $\varepsilon(x)$ en $+\infty$ suivant : $\varepsilon(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$, puis celui de $f(x) = -x - 1 + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Celui-ci aurait permis de trouver la droite asymptote Δ, mais pas la position locale au $\mathcal{V}(+\infty)$, car on ne connait PAS le signe du $o\left(\frac{1}{x}\right)$ (seulement qu'il est négligeable devant $\frac{1}{x}$, et donc qu'il tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$). Comment le savoir à l'avance ? Difficile...sauf calcul rapide de tête, il faut tenter sa chance à l'ordre le plus simple, puis pousser le DL plus loin (donc recommencer au début) si l'on se rend compte qu'il manque des termes pour conclure convenablement. Pour ma part : merci Maple !

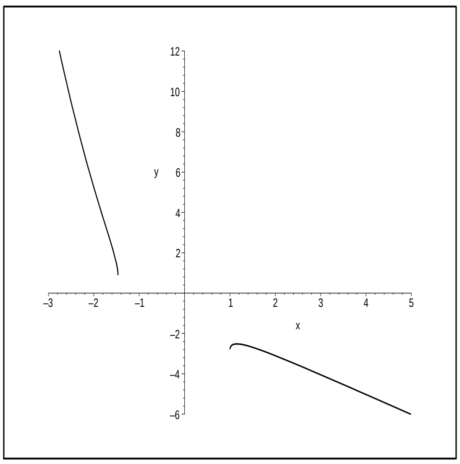
```
> f:=unapply(sqrt(x^4-x^2+x-1)-(x+1)*sqrt(x^2+1),x);
```

$$f := x \to \sqrt{x^4 - x^2 + x - 1} - (x+1)\sqrt{x^2+1}$$

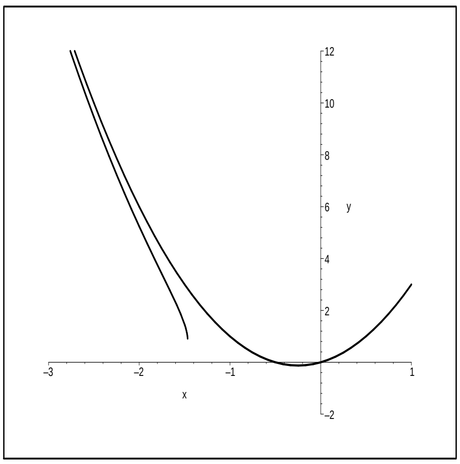
```
> taylor(f(x),x=-infinity,3); taylor(f(x),x=+infinity,4);
```

$$2\,x^2 + x + \frac{1}{x} + \mathrm{O}(\frac{1}{x^2})$$

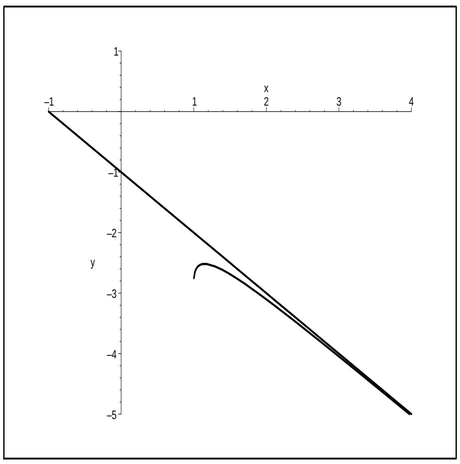
$$-x - 1 - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{8\,x^3} + \mathrm{O}(\frac{1}{x^4})$$



$y = f(x)$ seul



$y = f(x)$ et $y = 2x^2 + x$



$y = f(x)$ et $y = -x - 1$

Exemple 5

Soit $\boxed{f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)}$, défini pour $x \in]0, +\infty[$.

Etude en $+\infty$: on factorise $f(x) = x\ln(x+1) - x\ln(x) - \ln(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \ln(x)$.

Avec $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} = 1$, et $-\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, on déduit $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln(x)}$.

Mieux : $[f(x) - (-\ln(x)+1)] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci permet d'affimer que $\mathcal{C}_1$ d'équation «$y = -\ln(x)+1$» et Γ (représentative de f) sont asymptotes au voisinage de $+\infty$.

Pour la position locale, on effectue, avec $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, un DA de

$$x \times \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x \times \left((\frac{1}{x}) - (\frac{1}{2x^2}) + o(\frac{1}{x^2})\right) = 1 - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}).$$

Ainsi : $\boxed{f(x) = -\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)}$, DA au $\mathcal{V}(+\infty)$.

On en tire : $[f(x) - (-\ln(x)+1)] \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, d'où la position locale $\mathcal{C}_1/\Gamma$, courbe $\mathcal{C}$ au dessus de Γ dans $\mathcal{V}(+\infty)$.

Etude en 0 : $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $(x+1)\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, donc on a l'équivalent $\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)}$.

On peut déjà en déduire : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$: ainsi, la courbe Γ admet la droite d'équation «$x = 0$» (l'axe des ordonnées) comme droite asymptote (lorsque $x \to 0^+$).

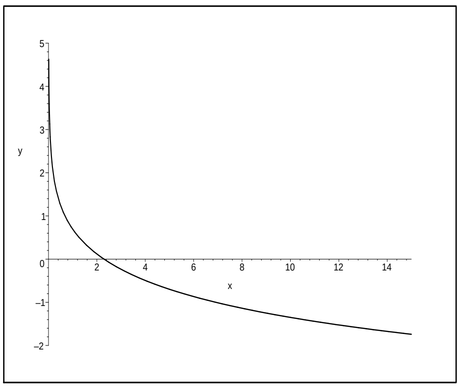
On va aller plus loin : est-ce que la courbe d'équation «$y = -\ln(x)$» est asymptote pour Γ au voisinage de 0^+ ? Pour cela, étudions le comportement de $g(x) = f(x) - (-\ln x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

On a $\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \neq 1$, on peut composer cet équivalent par la fonction ln, ce qui donne l'équivalent suivant : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, et un équivalent simple de $g(x)$:

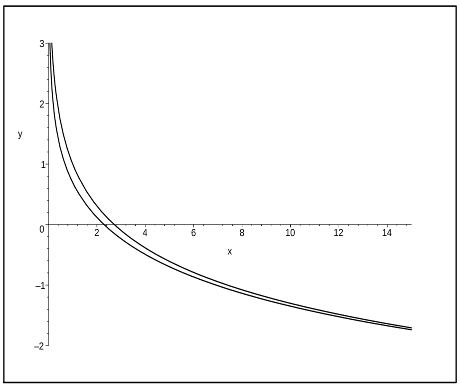
$$\boxed{f(x) - (-\ln x) = g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0}$$

(forme indéterminée connue : $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, par croissances comparées). Ceci permet d'affirmer que la courbe $\mathcal{C}_2$ d'équation «$y = -\ln(x)$» et Γ sont asymptotes au voisinge de 0^+ : de plus, comme $-x\ln(x) > 0$ dans ce voisinage , on peut même affirmer que Γ est au dessus de $\mathcal{C}_2$ au $\mathcal{V}(0^+)$.

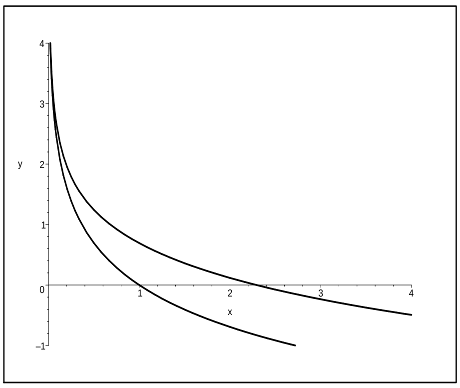
Remarque : on a obtenu un DA au voisinage de 0^+ du type $\boxed{f(x) = -\ln(x) - x\ln(x) + o(x\ln x)}$.



$y = f(x)$ seul



$y = f(x)$ et $y = -\ln(x) + 1$



$y = f(x)$ et $y = -\ln(x)$

Recherche de comportements asymptotiques de suites.

Une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ peut être définie de manière explicite, avec le terme u_n donné comme fonction de n. Dans ce cas, l'étude asymptotique de u_n, lorsque $n \to +\infty$, revient à celui de l'étude d'une fonction (par exemple, on pose $h = \dfrac{1}{n} \to 0$, et on cherche un DL($h \to 0$) : voir **exemple 6** ci dessous.

Il arrive que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ soit définie de manière implicite, par exemple comme solution d'un problème dépendant de n. Dans ce cas, il faut parfois ruser pour en déduire un équivalent de u_n, voire un début de développement asymptotique de u_n lorsque $n \to +\infty$: voir **exemple 7 et 8** ci dessous.

Exemple 6

Posons : $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}}$. Pour une suite $(u_n)_{n\geq 0}$, l'étude se fait nécessairement lorsque $n \to +\infty$. On sait que $\sqrt{n} = o(n)$, donc $(n + \sqrt{n}) \sim n$, puis, en composant cet équivalent par $\sqrt{\ }$ (licite : on peut élever, si cela a un sens, les deux termes d'un équivalent à un puissance *constante*), on obtient $\sqrt{n+\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}$ (i.e) $u_n \sim \sqrt{n}$.

Cherchons mieux : soit $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{n}}{n}} = \sqrt{1+h}$ où l'on pose $h = \dfrac{\sqrt{n}}{n} \to 0$. On développe :

$v_n = 1 + \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{8} + \dfrac{h^3}{16} + o(h) = 1 + \dfrac{\sqrt{n}}{2n} - \dfrac{\sqrt{n}^2}{8n^2} + \dfrac{\sqrt{n}^3}{16n^3} + o\left((\dfrac{\sqrt{n}}{n})^3\right)$, d'où

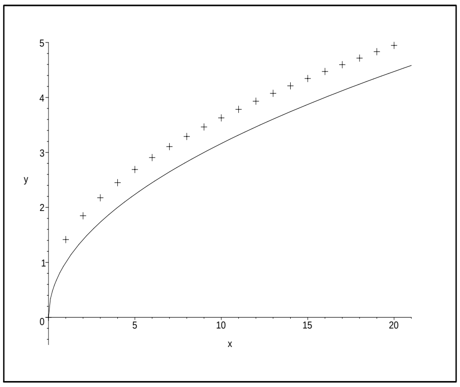
$\dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} + \dfrac{\sqrt{n}}{16n^2} + o\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n^2}\right)$, puis finalement

$$\boxed{u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

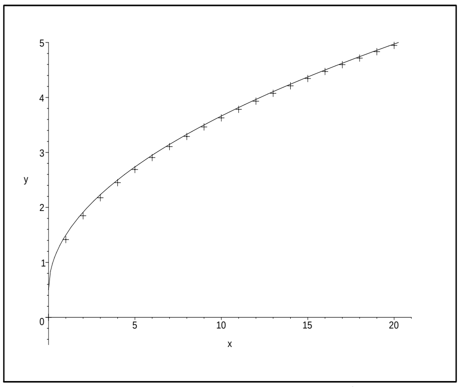
<u>Intérêt</u> : on en tire les équivalents successifs suivants, peut-être utiles dans des calculs de limites

$u_n \sim \sqrt{n}$, $\quad \left(u_n - \sqrt{n}\right) \sim \dfrac{1}{2}$, $\quad \left(u_n - \sqrt{n} - \dfrac{1}{2}\right) \sim -\dfrac{1}{8\sqrt{n}}$, $\quad \left(u_n - \sqrt{n} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{16n}$.

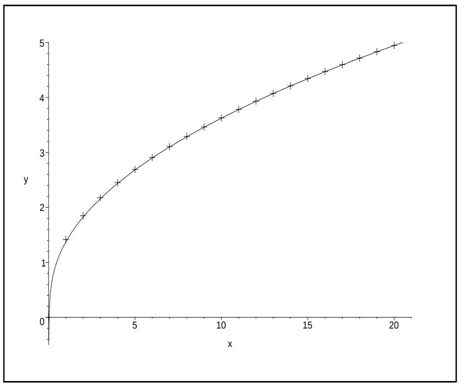
Ci dessous, la représentation des termes de la suite (u_n) (n en abscisse, u_n en ordonnée, termes représentés par les croix), accompagnée successivement des courbes représentatives du début du développement asymptotique.



(u_n) et $y = \sqrt{x}$



(u_n) et $y = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$



(u_n) et $y = \sqrt{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{x}}$

Exemple 7

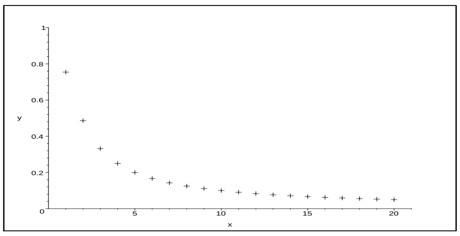
Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle u_n l'unique racine positive solution de l'équation
« $x^5 + nx - 1 = 0$ ».

• Il faut d'abord justifier l'existence et l'unicité de cet élément u_n.
A $n \geq 1$ fixé, on définit le polynôme P_n par $P_n(x) = x^5 + nx - 1$.
Sa dérivée est $P_n'(x) = 5x^4 + n > 0$ sur $[0, +\infty[$. Donc, la fonction P_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, avec $P_n(0) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty > 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires (P_n est bien une fonction continue, car c'est un polynôme), on est assuré de l'existence et de l'unicité de la racine réelle de P_n sur $[0, +\infty[$, racine qu'on l'on ne sait pas calculer explicitement ! On pouvait aussi avancer le fait que P_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$ (théorème de la bijection).

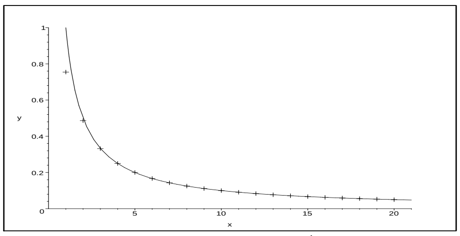
• Recherche de la limite de la suite (u_n) : on remarque que $P_n(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n})^5 + n\frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n^5} > 0$. Donc, avec la stricte croissance de la fonction P_n et la définition de u_n (unique zéro de P_n sur $[0, +\infty[$), on peut en déduire l'encadrement $\boxed{0 < u_n < \dfrac{1}{n}}$. Avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et le théorème d'encadrement, on en déduit la limite de la suite, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0}$.

• Recherche d'un équivalent de la suite (u_n) : par définition, on a, pour tout entier $n \geq 1$, $P_n(u_n) = 0$, (i.e) $(u_n)^5 + nu_n - 1 = 0$, ce qui peut s'écrire $(1 - nu_n) = (u_n)^5 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0^5 = 0$ (car on sait que la suite (u_n) converge vers 0). Ainsi, on a prouvé $\lim\limits_{n \to +\infty} (nu_n - 1) = 0$ (i.e) $\lim\limits_{n \to +\infty} (nu_n) = 1$, d'où l'on tire l'équivalent : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}}$. Mais on peut encore faire mieux !

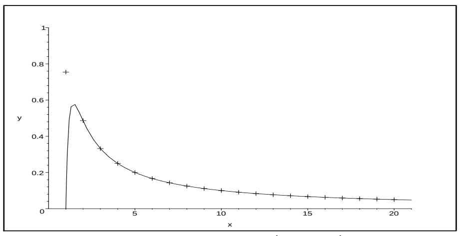
• Recherche d'un développement asymptotique de la suite (u_n) : on sait $u_n \sim \dfrac{1}{n}$, donc, en posant $\boxed{\varepsilon_n = \left(u_n - \dfrac{1}{n}\right)}$, on a $\varepsilon_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Essayons de trouver un équivalent plus précis pour la suite (ε_n).
On rappelle, pour tout $n \geq 1$: $(u_n)^5 = 1 - nu_n$. Mais $\varepsilon_n = u_n - \dfrac{1}{n}$ d'où la relation $n\varepsilon_n = nu_n - 1$.
Ainsi, en reportant : on a $(u_n)^5 = -n\varepsilon_n$, d'où l'on tire $\varepsilon_n = -\dfrac{(u_n)^5}{n} \sim -\dfrac{1}{n^6}$ (en utilisant l'équivalent connu $u_n \sim \dfrac{1}{n}$). Ainsi, on a prouvé l'équivalent $\boxed{\varepsilon_n \sim -\dfrac{1}{n^6}}$. On en déduit l'égalité $\varepsilon_n = -\dfrac{1}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$, puis, avec $u_n = \dfrac{1}{n} + \varepsilon_n$, on obtient un développement asymptotique de u_n, lorsque $n \to +\infty$:
$\boxed{u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)}$ (rappel, on est incapable de calculer exactement u_n).



(u_n) seule



(u_n) et $y = \frac{1}{x}$

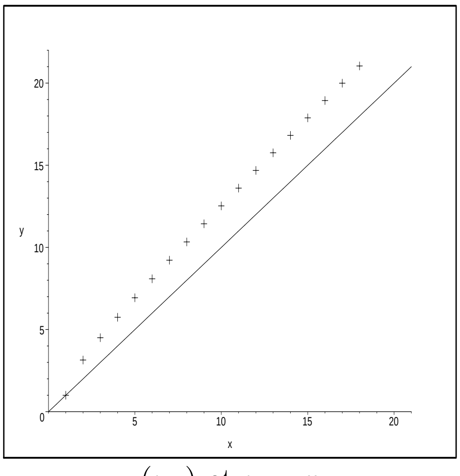


(u_n) et $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^6}$

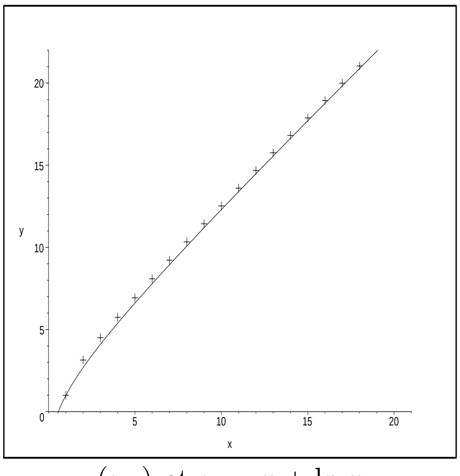
Exemple 8

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle u_n l'unique solution supérieure à 1 de l'équation
$$\text{« } x - \ln(x) - n = 0 \text{ ».}$$
Cette suite est bien définie car, à $n \geq 1$ fixé, l'application f_n, définie par $f_n(x) = x - \ln(x) - n$, est strictement croissante sur l'intervalle $[+1, +\infty[$ (car $f_n'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$), continue avec $f_n(1) = 1 - n \leq 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty > 0$ (car $\ln(x) = o(x)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$, donc $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$). Par le théorème des valeurs intermédiaires, on est assuré de l'existence et de l'unicité de u_n, unique zéro de f_n sur $[1, +\infty[$. De plus, on a $f_n(n) = n - \ln(n) - n = -\ln(n) \leq 0$, donc par stricte croissance de f_n, on peut affirmer $u_n \in [n, +\infty[$ (i.e) $n \leq u_n$. Ceci implique, par minoration (*théorème de l'ascenseur ?*) :
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}.$$
Mieux : on a, pour tout entier $n \geq 1$, $f_n(u_n) = 0$ (i.e) $u_n - \ln(u_n) - n = 0$ d'où $\dfrac{n}{u_n} = 1 - \dfrac{\ln(u_n)}{u_n}$.
Or, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(X) = \underset{X \to +\infty}{o}(X)$ d'où $\dfrac{\ln(u_n)}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n}{u_n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(u_n)}{u_n}\right) = 1 - 0 = 1$. De ceci, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n}{u_n}\right) = 1$, autrement dit $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n}$. Puis, $u_n - n = \ln(u_n) \sim \ln(n)$ (composition de l'équivalent par ln licite car $\lim(n) = +\infty \neq 1$) d'où le développement asymptotique : $\boxed{u_n = n + \ln(n) + o(\ln n)}$.
Encore mieux : on a $u_n - n - \ln(n) = \ln(u_n) - \ln(n) = \ln\left(\dfrac{u_n}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)\right)$
avec $\dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $(u_n - n - \ln(n)) \sim \left(\dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)\right) \sim \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$
d'où le développement asymptotique plus précis : $\boxed{u_n = n + \ln(n) + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)}$.

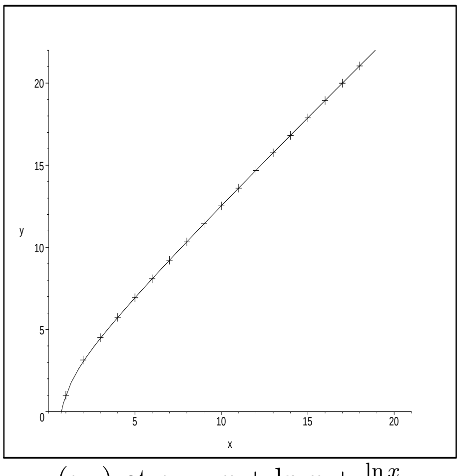
Remarque : comme dans l'exemple précédent, on est incapable de calculer les valeurs explicites des termes u_n. Afin de pouvoir tout de même tracer une représentation graphique, on peut en obtenir des valeurs approchées assez précises grâce à la fonction `>fsolve(x-ln(x)-n=0,x=1..100)` de Maple (recherche, pour un entier $n \geq 1$ à fixer, de la solution u_n dans l'intervalle $[1, 100]$, ce qu'il faut préciser à Maple car il y a une autre solution dans l'intervalle $]0, 1[$!).



(u_n) et $y = x$



(u_n) et $y = x + \ln x$



(u_n) et $y = x + \ln x + \frac{\ln x}{x}$