L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 *Soit* $P_n(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)...(1+X^{2^n})$. *Calculer les coefficients de* P_n.

Exercice 2 *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k = \left(1-X^3\right)^n$.

Exercice 3 *En calculant de deux manières le terme de degré* $2n$ *de* $P(X) = (1+X)^{2n}(1-X)^{2n} = \left(1-X^2\right)^{2n}$, *montrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$.

Exercice 4 *Déterminer le degré de* $(X^2+a)^n - 2X^{2n} + (X^2-b)^n$ *en fonction de* a *et* b.

Exercice 5 *Déterminer tous les polynômes* P *de* $\mathbb{R}[X]$, *non nuls, tels que* $\left(X^2+1\right)P'' - 6P = 0$ *et* $P(1) = 2$

Exercice 6 *Résoudre l'équation suivante dans* $\mathbb{C}[X]$: $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 1$

Exercice 7 *Résoudre l'équation suivante dans* $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$

Exercice 8 *(Archimède 1998). On considère l'application* Φ *de* $\mathbb{R}[X]$ *dans lui même définie par*

$$\Phi(P) = (2X-1)P - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)P'$$

où P' *désigne le polynôme dérivé. Déterminer le degré de* $\Phi(P)$ *en fonction du degré de* P. *Montrer que* Φ *est linéaire, injective et résoudre* $\Phi(P) = 1$.

Exercice 9 *On considère l'application* T *définie sur* $\mathbb{R}[X]$ *par*

$$T(P) = 3XP + X^2P' - X^3P''$$

1. *Déterminer le degré de* $T(P)$ *en fonction de* P.
2. *L'application* T *est-elle injective ? surjective ?*

Divisibilité

Exercice 10 *Effectuer la division euclidienne de* $A = 5X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X + 3$ *et de* $B = X^2 + 2X - 1$.

Exercice 11 *Calculer, pour* $n \geq 2$ *les restes des divisions euclidiennes de* $P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ *par*

a) $(X-3)(X-2)$ b) $(X-2)^2$ c) $(X-3)^2(X-2)^2$

(on pourra, pour b et c, dériver l'expression obtenue en écrivant la division euclidienne)

Exercice 12 *Déterminer* p *et* q *dans* $\mathbb{R}$ *pour que* $P = X^3 + pX + q$ *soit divisible par* $Q = X^2 + 3X - 1$.

Exercice 13 *Déterminer* a *et* b *pour que* $X^2 - aX + 1$ *divise* $X^4 - X + b$.

Exercice 14 *Soit* $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *et* $P_n(X) = (\sin(t)X + \cos(t))^n$. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* P *par* $\left(X^2+1\right)$.

Dérivation-Taylor

Exercice 15 *Déterminer tous les polynômes* P *de* $\mathbb{R}[X]$, *tels que* $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ *et* $P(1) = 2$.

Exercice 16 *Résoudre l'équation suivante dans* $\mathbb{C}[X]$: $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 1$.

Exercice 17 *Résoudre l'équation suivante dans* $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$

Exercice 18 *Déterminer les polynômes* P *tels que* P' *divise* P.

Racines

Exercice 19 *Montrer que* $X^2 - X + 1$ *divise* $P = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$

Exercice 20 *Déterminer* a *pour que* $P(X) = X^4 + aX + a$ *et* $Q(X) = X^3 + aX + a$ *aient une racine commune, préciser cette racine.*

Exercice 21 *Montrer que le polynôme* $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$ *n'a pas de racine multiple.*

Exercice 22 *Deux polynômes* U *et* V *vérifient* $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$ *pour tout* $x > 0$*. Montrez que* U *et* V *sont tous deux égaux au polynôme nul.*

Exercice 23 *Donner l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans les polynômes suivants :*

$$P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1 \text{ et } Q = (n-4)X^n - nX^{n-2} + nX^2 - (n-4) \qquad n \geq 5$$

Exercice 24 *Montrer que pour tout* $n \neq 0$, $X(X+1)(2X+1)$ *divise* $(X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.

Exercice 25 *Soit* $P = X^4 + 2X^2 + 1$*et* $Q = X^5 + X^3 - X^2 - 1$*. Montrer que les racines de* P *sont aussi racines de* Q*. Effectuer la division euclidienne de* Q *par* P*. Pourquoi* P *ne divise-t-il pas* Q *?*

Exercice 26 *Trouver une CNS pour que* $X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$ *ait une racine d'ordre* 4*. Quelle est alors cette racine et quelles sont les autres racines.*

Exercice 27 *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P(0) = 0$ *et* $P\left(X^2+1\right) = P(X)^2 + 1$*. On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = u_n^2 + 1$*. Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$*. En déduire* P*.*

Exercice 28 *Soient* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ *six réels deux à deux distincts. On considère la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

On suppose que le produit des éléments de chaque colonne est égal à 2014*. Que dire du produit des éléments de chaque ligne ? (On pourra poser* $P(X) = (X+a_1)(X+a_2)(X+a_3)$*).*

Exercice 29 *Soit* P *et* Q *deux polynômes de* $K[X]$, *on note* R *le reste de la division euclidienne de* P *et de* Q*.*

1. *Montrer que* $\alpha \in K$ *est racine commune à* P *et à* Q *si et seulement si* α *est racine commune à* Q *et à* R*.*
2. *En déduire que* $P = X^3 + pX + q$ *admet une racine double si et seulement si* $4p^3 + 27q^2 = 0$*.*

Factorisation-Irréductibles

Exercice 30 *Factoriser sur* $\mathbb{R}$ *les polynômes suivants :*

① $X^4 + 1$	② $X^8 + X^4 + 1$
③ $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$	④ $X^9 + X^6 + X^3 + 1$
⑤ $X^4 - aX^2 + 1$ *suivant le paramètre* $a \in \mathbb{R}$	⑥ $(X^2-1)^3 - 8X^3$.

Exercice 31 *Factoriser sur* $\mathbb{R}$ *le polynôme:* $X^8 + 1$ *, en déduire que* $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Exercice 32 *Soit* $P \in R[X]$ *unitaire. Montrer que* P *est scindé dans* $R[X]$ *si, et seulement si :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^{\deg P}$$

Exercice 33 *Soit* P *de degré* n *tel que pour* $i \in \{1, \cdots, n+1\}$ *on ait* $P(i) = \frac{1}{i}$*. Déterminer* $P(0)$*.*

Relations coefficients-racines

Exercice 34 *Résoudre l'équation* $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$, *sachant que la somme de deux des racines vaut* -1.

Exercice 35 *Résoudre l'équation* $2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$, *sachant que la somme de deux des racines vaut* 1.

Exercice 36 *On désire résoudre le système* $(\mathcal{S}) : \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3 \\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-12 \end{cases}$ *où* $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$.

1. *On pose* $P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$, *déterminer les coefficients de* P.
2. *Déterminer les racines de* P *et en déduire les solutions de* $(\mathcal{S})$.
3. *Procéder de même pour résoudre* $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-2 \\ \alpha^2+\gamma^2+\gamma^2=0 \\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=1 \end{cases}$ *où* $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$.

Exercice 37 *Si* α,β,γ *sont les racines de* $P(X) = X^3 - X - 1$, *calculer* $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}+\dfrac{1+\beta}{1-\beta}+\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}$.
On pourra chercher un polynôme dont les racines sont $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}, \dfrac{1+\beta}{1-\beta}$ *et* $\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

Exercice 38 *Soit* $a\in\mathbb{R}$ *et* $P_a = X^2 - \left(a^2+1\right)X - a^2$.

1. *Sans les calculer, justifier que* P_a *a deux racines réelles de signe opposé.*
2. *Soient* α *et* β *ces deux racines, calculer* $\arctan\alpha + \arctan\beta$.

Exercice 39 *On désire calculer la somme* $S_1 = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right)+\tan^2\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)+\tan^2\left(\dfrac{5\pi}{7}\right)$ *et* $S_2 = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{14}\right)+\tan^2\left(\dfrac{3\pi}{14}\right)+\tan^2\left(\dfrac{5\pi}{14}\right)$

1. *Justifier qu'il existe un polynôme* $R\in\mathbb{R}[X]$ *tel que* $P = \dfrac{(1+iX)^7-(1-iX)^7}{2i} = XR\left(X^2\right)$.
2. *Déterminer les racines de* P *et en déduire celles de* R.
3. *Calculer alors* S_1.
4. *Pour* a *et* b *réels, simplifier* $\tan a - \dfrac{1}{\tan b}$ *lorsque cette expression existe.*
5. *Calculer la somme* S_2.

Exercice 40 *Soit* $a\in\mathbb{R}$ *et* $P = (X+1)^n - e^{2ina}$ *où* $a\in\mathbb{R}$

1. *Factoriser* P *sur* $\mathbb{C}$.
2. *En déduire la valeur de* $\Pi = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$.