EXERCICE 1 :

1. Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(g(x)) = f(x, x^2) = x^3$$

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto g(f(x, y)) = g(xy) = (xy, x^2y^2)$$

2. • f injective ? Il faut se poser la question suivante : tout couple xy de $\mathbb{R}$ a-t-il au plus un antécédent par f ? La réponse est non, pour s'en convaincre, on peut écrire
$$f(1, 1) = f(2, 1/2) = 1$$
ce qui prouve que f n'est pas injective.

- f est-elle surjective ? Autrement dit, est-il vrai que tout élément $t \in \mathbb{R}$ est l'image par f d'un couple de $\mathbb{R}^2$? Si l'on remarque que $f(1, t) = t$, on peut affirmer que f est surjective.

- g injective ? Si l'on se donne x et x' tels que $g(x) = g(x')$, c'est à dire tels que $(x, x^2) = (x', x'^2)$ alors on obtient $x = x'$ par identification ; c'est la preuve que g est injective (définition de l'injectivité).

- g est-elle surjective ? Tout couple de $\mathbb{R}^2$ n'est pas de la forme (x, x^2) ; par exemple $(1, 0)$ n'a pas d'antécédent par g : en effet, $(x, x^2) = (1, 0)$ impliquerait $x = 1$ et $x^2 = 0$, ce qui n'est pas possible.

- Grâce au théorème de la bijection, on peut affirmer que $f \circ g$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en particulier, elle est injective et surjective.

- Comme f n'est pas injective, $g \circ f$ n'est pas injective. Pour s'en convaincre
$$g(f(1, 1)) = g(f(2, 1/2)) = (1, 1)$$

- Comme g n'est pas surjective, $g \circ f$ n'est pas surjective. $(1, 0)$ est un antécédent de 0 par f, mais n'admet pas d'antécédent par g (voir plus haut).

EXERCICE 2 :

L'application h définie par

$$h : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (p, q) \longmapsto 2^p 3^q$$

- h est-elle injective ? Soit (p, q) et (a, b) deux couples de $\mathbb{N}^2$ tels que $h(p, q) = h(a, b)$, on peut donc écrire que $2^p 3^q = 2^a 3^b$. 2 et 3 sont des nombres premiers et l'unicité de la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers permet d'écrire que $(p, q) = (a, b)$; h est injective.

- h est-elle surjective ? Toujours grâce à l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, le nombre 5 ne peut pas s'écrire $2^p 3^q$, il n'existe donc pas $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $h(p, q) = 5$ donc h n'est pas surjective.

EXERCICE 3 :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geqslant -1$ donc $(-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \geqslant -1$ et A est minorée par -1 ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0 \Leftrightarrow n + 1 \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$. Par ailleurs, $(-1)^n \leqslant 1$ donc en additionnant membre à membre, on obtient $(-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; A est majoré.
$$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n+1} \leqslant 2 \text{ donc } A \text{ est borné.}$$
- A est non vide et majoré donc inf A et sup A existent. $2 \in A$ ($n = 0$), donc sup A=max A=2.

- On pose $a_p = (-1)^{2p+1} + \dfrac{1}{2p+2}$, manisfestement $a_p \in A$ pour tout p entier naturel donc $a_p \geqslant -1$ (⋇).

$$a_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} -1 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists p_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}, \quad p \geqslant p_\epsilon \Rightarrow |a_p + 1| < \epsilon \Leftrightarrow -1 - \epsilon < a_p < -1 + \epsilon.$$

Ce qui implique, compte-tenu de ($\circledast$), que pour tout $\epsilon > 0$, il existe des éléménts a_p tels que $-1 \leqslant a_p < -1 + \epsilon$; ceci est une caractérisation du fait que $\inf A = -1$.

EXERCICE 4 :

Soit $b \in B$. D'après l'hypothèse, $\forall a \in A$, $a \leqslant b$, donc la partie A est majorée par b.

A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée donc $\sup A$ existe et $\sup A \leqslant b$ (puisque $\sup A$ est le plus petit des majorants, il est inférieur à b qui majore A).
B est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par $\sup A$ donc $\inf B$ existe et $\sup A \leqslant \inf B$ ($\inf B$ est le plus grand des minorants).

EXERCICE 5 :

A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ donc $\sup A$ et $\sup B$ existent.

Soit $x \in A + B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$; ainsi $x = a + b \leqslant \sup A + \sup B$, donc $A + B$ est majorée par $\sup A + \sup B$. $A + B$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (puisque A et B sont non vides) et majorée, donc $\sup(A + B)$ existe et

$$\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$$

Pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $a = (a + b) - b$.
Or $a + b \leqslant \sup(A + B) \Leftrightarrow (a + b) - b \leqslant \sup(A + B) - b \Leftrightarrow a \leqslant \sup(A + B) - b$, ce qui prouve que $\sup(A + B) - b$ est un majorant de A et de ce fait $\sup A \leqslant \sup(A + B) - b \Leftrightarrow b \leqslant \sup(A + B) - \sup A$
La dernière inégalité prouve que $\sup(A + B) - \sup A$ est un majorant de B, et toujours en utilisant le fait qu'une borne supérieure est le plus petit des majorants, on obtient

$$\sup B \leqslant \sup(A + B) - \sup A \Leftrightarrow \sup A + \sup B \leqslant \sup(A + B)$$

Il s'en suit l'égalité.

EXERCICE 6 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n(1 - x)$.
f_n est dérivable sur $[0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1 - x) - x^n = x^{n-1}[n(1 - x) - x] = x^{n-1}[n - x(n + 1)]$$

$f_n'(x)$ s'annule en 0 et en $\dfrac{n}{n+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Comme $x^{n-1} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $f_n'(x)$ est du signe de $n - x(n + 1)$. Nous obtenons donc le tableau de variations suivant

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
Signe de $f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_n	0	$\nearrow$	$f_n(\frac{n}{n+1})$	$\searrow$	0

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$-n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = -\dfrac{n}{n+1} + o(1)$ donc $-n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ et $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0$.

EXERCICE 7 :

On pose $a_n = (x_1 + \ldots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right)$ avec $x_i > 0$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
$A_n = \{a_n ; x_1, x_2, \ldots, x_n > 0\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0 ; elle admet une borne inférieure.

Après développement, on écrit a_n de la façon suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = n + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right)$$

Si l'on pose $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, pour $x > 0$, on dispose d'une autre expression de a_n

$$a_n = n + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} f\left(\frac{x_i}{x_j}\right)$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$. L'étude du signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et des variations de f permet de préciser que $f(x) \geqslant 2$ pour $x > 0$.

$\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, $\dfrac{x_i}{x_j} > 0$ et donc $f\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right) \geqslant 2$, il s'en suit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2$
$\Leftrightarrow a_n \geqslant n + 2b_n\,(\bigstar)$ avec $b_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

De ce fait, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\bigstar) \Leftrightarrow a_n \geqslant n + 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow a_n \geqslant n^2$ d'où $\inf A_n \geqslant n^2$.

Or si l'on choisit $x_i = 1$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on obtient $a_n = n^2$, ce qui signifie que $\inf A_n$ est le minimum de A_n.

Finalement $\inf\left\{(x_1 + \ldots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right) ; x_1, \ldots, x_n > 0\right\} = n^2$