EXERCICE 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. Montrer qu'un triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si

$$a + jb + j^2c = 0$$

où a, b, c désignent les affixes respectives de A, B et C.

EXERCICE 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer A^n pour n entier naturel.

1. Calculer les premières puissances de A à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice. Quelle forme particulière remarque-t-on pour ces matrices ?
2. (a) Écrire A sous la forme $2B - I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 et B une matrice à préciser.
   (b) Montrer que $B^2 = 3B$.
   (c) En déduire A^2 en fonction de B et I_3, puis A^3.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = (-1)^n I_3 + \dfrac{1}{3}(5^n - (-1)^n)B$.
4. Écrire A^n avec tous ces coefficients en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICE 3 :

Soit x et y deux réels tels que $\underline{\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{1}}$ et soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} y & -x \\ -y & x \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB et BA.
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $A^n = A$ et $B^n = B$.
3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont des réels tels que $p - q \neq 1$.
   (a) Vérifier que $M = A + (p-q)B$ avec $x = \dfrac{q}{1-p+q}$ et $y = \dfrac{1-p}{1-p+q}$.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M^n = A + (p-q)^n B$.
   (c) Dans le cas où $-1 < p - q < 1$, que peut-on dire pour les coefficients de la matrice M^n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Donner l'expression de la matrice A^{-1} (si elle existe).

EXERCICE 5 :

On se propose de déterminer les suites $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont les premiers termes sont $j_0 = 20$ et $a_0 = 0$ et pour lesquelles, on a les relations

$$\forall n \in \mathbb{N},\ j_{n+1} = j_n + 8a_n \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 0,25 j_n$$

On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire le système (S) sous la forme matricielle $V_{n+1} = LV_n$ où L est une matrice carrée réelle d'ordre 2 à déterminer. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = L^n V_0$.
2. On considère la matrice carrée d'ordre 2, $P = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de P^{-1} et exprimer le produit matriciel $D = P^{-1}LP$; en déduire l'expression de L en fonction de P, D et P^{-1}..
3. Prouver que $L^n = PD^nP^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Expliciter la matrice L^n et en déduire la matrice colonne V_n. Conclure.

EXERCICE 6 :

Soit ω une racine nième de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) w^k$$

En calculant $(1-w)S$, déterminer la valeur de S.

EXERCICE 7 :

Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$