

LES NOMBRES COMPLEXES

I - Le corps des nombres complexes : \mathbb{C}

Les nombres complexes sont les nombres s'écrivant $x + iy$, où x et y sont des réels ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) et i une quantité vérifiant l'égalité $i^2 = -1$.

Cette écriture est unique sous cette forme : autrement dit, si $x + iy = x' + iy'$ avec x, y, x', y' réels, alors nécessairement $x = x'$ et $y = y'$. Attention, on «n'identifie pas» si le caractère réel des quantités n'est pas assuré : par exemple, $-1 + 0.i = 0 + b.i$ est vrai pour $b = i \notin \mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Si $z = x + iy$ (avec x, y réels), on note

$$\boxed{x = \operatorname{Re}(z) \text{ et } y = \operatorname{Im}(z)} \quad (\text{parties réelle et imaginaire du nombre complexe } z).$$

Calculs dans \mathbb{C} : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \quad \text{et} \quad \boxed{zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y')}.$$

Muni de ces lois, on dit que l'ensemble \mathbb{C} , muni des lois $+$ et \times est un **corps**. L'ensemble \mathbb{C} contient \mathbb{R} (le corps des nombres réels) : un nombre réel est un nombre complexe (réciproque fautive en général, bien entendu).

Parmi les complexes, les nombres de la forme $y.i$ (avec y réel) sont appelés des **imaginaires purs**.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, si M est un point de coordonnées (x, y) , on dit que $z = z_M = x + iy$ est l'**affiche du point** M . Dans ce cas, la longueur $OM = \|\vec{OM}\|$ i.e la norme du vecteur \vec{OM} , vaut $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. On a la même définition pour un vecteur $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ du plan. On note $M(z)$ (ou $\vec{v}(z)$).

Remarque : l'affixe du vecteur \vec{AB} est $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$, et sa norme $\|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|$.

II - Module et conjugué d'un nombre complexe

Si $z = x + iy$ (avec x, y réels), alors on note

- $\bar{z} = x - iy$: le conjugué du complexe z (c'est un complexe).
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$: le module du nombre complexe z (c'est un réel positif : $|z| \in \mathbb{R}^+$).

Remarque 1 : $z \times \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$: ainsi, $\boxed{|z|^2 = z\bar{z}}$.

Remarque 2 :

$$\boxed{z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re}(z)} \quad \text{et} \quad \boxed{z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\operatorname{Im}(z)}.$$

D'où :

$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$$

On en tire les *caractérisations* suivantes : si z est un nombre complexe, alors

$$(z \text{ est un réel}) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(z) = 0) \Leftrightarrow (z - \bar{z} = 0) \Leftrightarrow (\bar{z} = z)$$

et

$$(z \text{ est un imaginaire pur}) \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z) = 0) \Leftrightarrow (z + \bar{z} = 0) \Leftrightarrow (\bar{z} = -z)$$

- Si Ω est un point d'affixe ω , et r un réel strictement positif, alors l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - \omega| = r$ (i.e. $\|\overrightarrow{\Omega M}\| = \Omega M = r$) est le cercle de centre Ω , rayon r (on obtient le disque correspondant avec $|z - \omega| \leq r$).

Propriétés : pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

- $(z = 0) \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0) \Leftrightarrow (|z| = 0)$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- si $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- ATTENTION : l'égalité $|z + z'| = |z| + |z'|$ est FAUSSE en général.

III - L'inégalité triangulaire et ses conséquences

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a l'inégalité

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

La preuve sera faite en cours. Elle utilise notamment les résultats simples suivants :

- Si a et b sont des **réels positifs**, alors on a l'équivalence $(a \leq b) \Leftrightarrow (a^2 \leq b^2)$.
- Si z est un nombre complexe, on a : $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

Conséquences de l'inégalité triangulaire : pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

- $|z| - |z'| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z| - |z'| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$
- d'où $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$
- pour tout $\omega \in \mathbb{C}$: $|z - z'| \leq |z - \omega| + |z' - \omega|$
- pour tout entier $n \geq 2$ pour tous z_1, z_2, \dots, z_n dans \mathbb{C} : $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$(|z + z'| = |z| + |z'|) \Leftrightarrow \left(z = 0 \text{ ou } z' = 0 \text{ ou } \frac{z'}{z} \text{ est un réel positif} \right)$$

On a aussi : $(|z + z'| = |z| + |z'|) \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z' = 0 \text{ ou } \arg(z) = \arg(z') [2\pi])$.

Le cas d'égalité correspond donc au cas où, soit l'un des vecteurs $\vec{v}(z)$ ou $\vec{v}(z')$ est nul, soit ces deux vecteurs sont colinéaires et de même sens.

IV - Une formule TRES importante (somme des termes d'une suite géométrique)

Si q est une constante complexe, et n un entier naturel, alors

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \begin{cases} n + 1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

V - Une autre formule importante (formule du binôme de Newton)

Factorielle d'un entier naturel :

- $0! = 1$ (convention)
- si $n \geq 1$: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$. Un exemple : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
- Propriété : $(n + 1)! = (n + 1) \times n!$ d'où $\frac{(n + 1)!}{n!} = n + 1$. De même : $\frac{(n + 1)!}{n + 1} = n!$.

Coefficient binomial $\binom{n}{k}$, « k parmi n » :

- Pour des entiers vérifiant $0 \leq k \leq n$, on pose $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n - k)!}$.
Il représente le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble à n éléments.
Remarque : **par convention**, si $k > n$ ou $k < 0$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

- Propriétés : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$ et $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n - 1}{k - 1}$ (si $1 \leq k \leq n$).
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n - 1)}{2.1}$, $\binom{n}{3} = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{3.2.1}$.

Formule générale : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \frac{n - 1}{k - 1} \times \frac{n - 2}{k - 2} \times \dots \times \frac{n - k + 2}{2} \times \frac{n - k + 1}{1}$.

Exemples : $\binom{17}{3} = \frac{17}{3} \times \frac{16}{2} \times \frac{15}{1}$.

- si $0 \leq k \leq n - 1$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k + 1} = \binom{n + 1}{k + 1}$ («formule de Pascal»).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

On en déduit la construction du *triangle de Pascal* : 1 3 3 1 , etc....

• « **Formule du binôme de Newton** ».

Si a et b sont des nombres complexes, et n un entier naturel, alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n$$

i.e $(a+b)^n = b^n + nab^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + na^{n-1} b + a^n$.

Remarque : a et b jouant des rôles symétriques dans l'expression $(a+b)^n$, on a également la

formule : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Quelques exemples : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$,

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$,

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$...

Remarque : en remplaçant b par $-b$ dans cette dernière formule, on récupère :

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k \quad \text{i.e}$$

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n.$$

Exemples :

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

• Un cas particulier :

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \dots + \binom{n}{n-1} z^{n-1} + \binom{n}{n} z^n \quad \text{i.e}$$

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2} z^2 + \dots + nz^{n-1} + z^n.$$

Exemples : $(1+z)^4 = 1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4$, $(1+z)^5 = 1 + 5z + 10z^2 + 10z^3 + 5z^4 + z^5$.

VI - Paramétrage du cercle trigonométrique

• $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ = ensemble des nombres complexes de module 1.

• $(z \in \mathbb{U}) \Leftrightarrow$ (il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(t) + i \sin(t) = e^{it}$).

Remarque : $(z \in \mathbb{U}) \Leftrightarrow (z\bar{z} = |z|^2 = 1 \text{ i.e } \bar{z} = \frac{1}{z})$.

• Propriété : pour t et t' réels, on a $\overline{e^{it}} = e^{-it} = \frac{1}{e^{it}}$, et $e^{i(t+t')} = e^{it} \times e^{it'}$, résultat lié aux formules

♡ $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

♡ $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

♡ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

- ♡ $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ d'où $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- ♡ $\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$ d'où $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- ♡ $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ d'où $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- ♡ $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$ d'où $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- ♡ En définissant $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour $x \neq \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}, \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}, \quad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

- Formules d'Euler : $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ et $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

Application : linéarisation. Exemple : $\cos^3(t) = \frac{1}{4}(\cos(3t) + 3\cos(t))$.

- Factorisation d'une somme de deux complexes de module 1

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \quad \text{et} \quad e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$$

D'où l'on tire : $1 + e^{it} = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}}$ et $1 - e^{it} = -2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}}$.

Puis $1 + \cos(t) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et $1 - \cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

- Formules de Moivre : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et t réel,

$$(\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt), \quad \text{i.e. } (e^{it})^n = e^{int}!$$

Application (avec $n = 3$) : $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$ et $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$.

Rappel : pour tout réel t , $\frac{1}{e^{it}} = e^{-it} = \overline{e^{it}}$.

- Formules qu'il faut savoir retrouver : pour t réel et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = 1 + \cos(t) + \dots + \cos(nt) = \begin{cases} n+1 & \text{si } t = 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{nt}{2}\right) & \text{si } t \neq 0[2\pi] \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n \sin(kt) = \sin(t) + \sin(2t) + \dots + \sin(nt) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) & \text{si } t \neq 0[2\pi] \end{cases}$$

Méthode : remarquer $\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ikt}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n (e^{it})^k\right)$, et $\sum_{k=0}^n q^k = \dots$

- Transformation $a\cos(x) + b\sin(x)$ en $A\cos(x - \varphi)$.

Méthode : on pose $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis $a\cos(x) + b\sin(x) = A\left(\frac{a}{A}\cos(x) + \frac{b}{A}\sin(x)\right)$, où $\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{b}{A}\right)^2 = 1$, donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$.

Enfin : $a\cos(x) + b\sin(x) = A[\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)] = A\cos(x - \varphi)$.

Remarque : il s'agit tout simplement de voir $a\cos(x) + b\sin(x)$ comme la partie réelle du

complexe $(a - ib)e^{ix}$, puis d'écrire $a + ib = Ae^{i\varphi}$ (forme exponentielle).

VII - Argument d'un nombre complexe

- Si $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$. Ce réel θ s'appelle un **argument** du nombre complexe non nul z .

Dans ce cas, il y a une infinité de tels réels, définis à 2π près. On note $\arg(z) = \theta[2\pi]$.

- Propriétés : $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$, $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

- Calcul d'un angle entre deux vecteurs : $\widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})} = \arg\left(\frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$.

- Une nouvelle caractérisation des réels/imaginaires purs dans les complexes :

$$\boxed{(z \text{ est réel}) \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0[\pi])} \text{ et } \boxed{(z \text{ est imaginaire pur}) \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi])}.$$

VIII - L'exponentielle complexe

- Pour tout complexe $z = x + iy$ (x, y réels), on définit l'exponentielle du nombre complexe : $\exp(z) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y))$.

Notation : $e^z = e^{x+iy} = e^x \times e^{iy}$, autrement dit $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i\operatorname{Im}(z)}$.

- Propriétés : $e^{(z+z')} = e^z \times e^{z'}$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

- Equation : $e^z = 1 \Leftrightarrow (z \in 2i\pi\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } z = 2ik\pi)$.

- Remarque : l'équation $e^z = 0$ n'a pas de solution, mais si $\omega \in \mathbb{C}^*$, alors l'équation $e^z = \omega$ possède une infinité de solutions, définies à $2i\pi$ près.

Ainsi, $\boxed{\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*}$ est une application bien définie (qui est **surjective** mais **pas injective**).

- Propriété : pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $(e^z = e^{z'}) \Leftrightarrow (z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z})$

IX - Racines carrées dans \mathbb{C}

- Tout nombre complexe non nul z possède exactement deux racines carrées distinctes δ et $-\delta$: on a donc $\delta^2 = z$.

- Méthode : si z est de la forme $z = |z|e^{i\theta}$, alors $\delta = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Sinon, si z est de la forme $x + iy$, on cherche δ sous la forme $a + ib$, avec l'astuce :

$$(\delta^2 = z) \Leftrightarrow (\delta^2 = z \text{ et } |\delta|^2 = |z|) \Leftrightarrow \begin{cases} (a + ib)^2 = x + iy \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

ATTENTION : la notation \sqrt{z} n'a PAS DE SENS (sauf si z est un réel positif!)

X - Equation du second degré dans \mathbb{C}

On considère l'équation du second degré, à coefficients complexes $a \in \mathbb{C}^*$, $(b, c) \in \mathbb{C}$: (E) $az^2 + bz + c = 0$. On définit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: $\Delta \in \mathbb{C}$.

- Si $\Delta = 0$: (E) possède une racine double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$: soit δ une racine carrée de Δ (ie $\delta^2 = \Delta$). Alors (E) possède exactement deux racines complexes (distinctes mais pas forcément conjuguées) $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$.
- Les deux solutions de (E) $az^2 + bz + c = 0 = a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a})$ ont pour somme et produit

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Conséquence :

le polynôme $(X^2 - sX + p)$ possède deux racines dont la **somme** vaut s et le **produit** p .

Un exemple à retenir : $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

XI - Définition des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Définition-proposition

Soit n , un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

L'équation $\ll z^n = 1 \gg$ possède exactement n solutions distinctes.

On les appelle les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité : ce sont les $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Elles forment l'ensemble $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

On a donc : $\mathbb{U}_n = \{\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [0; n-1]\} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}\}$. On a $\overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$

Remarque : en notant $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on observe que $\omega_k = \alpha^k$. Ainsi $\mathbb{U}_n = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}\}$: cet ensemble est représenté dans le plan complexe par un polygone régulier convexe à n côtés, inscrit dans le cercle unité, et dont un sommet est 1.

Exemples

$\mathbb{U}_1 = \{1\}$, $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$, $\mathbb{U}_5 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}\}$.

A retenir : on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, d'où $j^3 = 1$ et $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$.

XII - Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Soit a , un nombre complexe non nul ($|a| = r > 0$) et $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition : l'équation $z^n = a$ possède exactement n solutions distinctes.

Méthode :

en écrivant $a = re^{i\alpha} = (\sqrt[n]{r} \times e^{i\frac{\alpha}{n}})^n$, on observe que $(\sqrt[n]{r} \times e^{i\frac{\alpha}{n}})$ est une solution particulière.

Puis, les n solutions distinctes de l'équation sont les $\omega_k \times (\sqrt[n]{r} \times e^{i\frac{\alpha}{n}})$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

XIII - Complexes et géométrie

- Caractérisation de l'orthogonalité (ici, $z \neq 0$ et $z' \neq 0$) :

(deux vecteurs non nuls $\vec{v}(z)$ et $\vec{v}'(z')$ sont orthogonaux) $\text{ssi } \widehat{(\vec{v}', \vec{v})} = \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

$\text{ssi } \left(\frac{z}{z'} \text{ est un imaginaire pur } \right)$

$\text{ssi } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = -\frac{z}{z'}$

$\text{ssi } (z \times \bar{z}' + z' \times \bar{z} = 0)$.

- Caractérisation de la colinéarité (ici, $z \neq 0$ et $z' \neq 0$) :

(deux vecteurs non nuls $\vec{v}(z)$ et $\vec{v}'(z')$ sont colinéaires) $\text{ssi } \widehat{(\vec{v}', \vec{v})} = \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = 0[\pi]$

$\text{ssi } \left(\frac{z}{z'} \text{ est un réel } \right)$

$\text{ssi } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = +\frac{z}{z'}$

$\text{ssi } (z \times \bar{z}' - z' \times \bar{z} = 0)$.

Rappel : si $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ sont quatre points du plan (avec $A \neq B$ et $C \neq D$), on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) [2\pi].$$

Application : trois points deux à deux distincts $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés $\text{ssi } \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} sont colinéaires $\text{ssi } \frac{c-a}{b-a}$ est un réel i.e $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0[\pi]$ i.e $\overline{\left(\frac{c-a}{b-a}\right)} = \left(\frac{c-a}{b-a}\right)$ etc...

XIV - Transformations géométriques et complexes

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- Soit θ un réel fixé.

L'application $z \mapsto R(z) = e^{i\theta} \times z$ représente la **rotation** de centre O et de mesure d'angle θ .

- Soit b un nombre complexe.

L'application $z \mapsto T(z) = z + b$ représente la **translation** de vecteur $\vec{v}(b)$.

- Soit k un nombre réel non nul.

L'application $z \mapsto H(z) = k \times z$ représente l'**homothétie** de centre O et de rapport k .

- L'application $z \mapsto S(z) = \bar{z}$ représente la **symétrie orthogonale** (réflexion) d'axe horizontal (i.e l'axe des réels passant par O et dirigé par \vec{e}_1).