Définition des matrices et des opérations usuelles

Exercice 1 *Ecrire les matrices $M = ((m_{i,j}))$ définies par*

$$①M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \text{ et } m_{i,j} = \frac{i}{j} \qquad ②M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ et } m_{i,j} = |i-j|$$
$$③M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \text{ et } m_{i,j} = \binom{i+j}{i-1} \qquad ④M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ et } m_{i,j} = \sqrt{ij+i+j}$$

Exercice 2 *Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que*

$$① \ A^2 = 0 \qquad ② \ A^2 = I_2 \qquad ③ \ A^2 = A$$

Exercice 3 *Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.*

Exercice 4 *Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & x & x \\ -a & x+1 & 0 \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$, déterminer a et x dans $\mathbb{R}$ pour que les termes de la diagonale principale de A^2 soient nuls.*

Exercice 5 *Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC, est-il vrai que $AB = AC \Longrightarrow B = C$?*

Exercice 6 *Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \bigcirc & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer M^2.*

Exercice 7 *Soit $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $a \neq 0$.*

1. *Calculer LC et $A = CL$.*
2. *Quel est le rang de A ?*
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A^2 = A$.*

Puissances de matrices

Exercice 8 *On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$: montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$. En déduire une expression de A^n.*

Exercice 9 *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$*

1. *Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice commutant avec A, déterminer B, puis montrer que B est une combinaison linéaire des matrices I_3, A et A^2.*

Exercice 10 *On considère la matrice* $M=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, *montrer que pour* $n\in\mathbb{N}$, *la matrice* M^n *est une combinaison linéaire de* I_3 *et de* M.

Exercice 11 *Soit* $J=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}$ *la matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients valent* 1. *Calculer* J^p *pour* $p\in\mathbb{N}$.

Le binôme

Exercice 12 *Calculer* A^n *et* B^n *pour* $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercice 13 *Soit* $A=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}$ *calculer* A^k, *pour* $k\in\mathbb{N}$.

Exercice 14 *Soit* $a\in\mathbb{R}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ *et* $A=D+N$. *Montrer que* $N^3=0$, $DN=ND$, *en déduire* A^n *pour* $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 15 *Calculer* A^n *pour* $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ *et* n *entier. Trouver* B *tel que* $B^2=A$.

Exercice 16 *Soit* $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&1&2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ *et* $B=A-2I$. *Calculer* B^2 *puis* B^3. *Montrer que pour* $n\in\mathbb{N}$, *on a* $A^n=2^nI+n2^{n-1}B+\dfrac{n(n-1)}{2}2^{n-2}B^2$.

Exercice 17 *Soit* $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ *et* $A=\dfrac{1}{4}(I_3+J)$.

1. *Calculer* A^n.
2. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites telles que :*

$$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{1}{4}(2x_n+y_n+z_n)\\y_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+2y_n+z_n)\\z_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+y_n+2z_n)\end{cases}$$

   Donner l'expression générale de chaque suite, puis leurs limites.

Matrices particulières

Exercice 18 *Soit* $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, *déterminer toutes les matrices qui commutent avec* A.
Même question lorsque $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, *puis* $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Exercice 19 *Soient* $(A,B)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, *a-t-on toujours* $AB\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *?*
Même question si A *et* B *commutent, puis si* $(A,B)\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe un unique couple (S, A) où $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$.*

Donner ce couple lorsque $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $A^t A$ et ${}^t A A$ sont des matrices symétriques.*

Opérations élémentaires - Matrices inversibles

Exercice 22 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = \bigcirc$. La matrice A est-elle inversible ? Même question s'il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AX = \bigcirc$.*

Exercice 23 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, calculer $(A - I_3)\left(A^2 + I_3\right)$, en déduire que A est inversible ainsi que son inverse.*

Exercice 24 *On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $M = A - I_3$. Calculer M^2, en déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.*

Exercice 25 *Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer M^2, puis M^n où $n \in \mathbb{N}$. La matrice M est-elle inversible (préciser alors l'inverse) ?*

Exercice 26 *Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Exprimer $M(a)$ à l'aide de $M(1)$ et de I_n.*
2. *Calculer $M(1)^2$ puis $M(a) \times M(b)$ si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*
3. *Pour quelles valeurs la matrice $M(a)$ est-elle inversible ? Préciser alors son inverse.*

Exercice 27 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. A l'aide d'opérations sur les lignes, trouver une matrice U inversible telle que $UA = R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Exercice 28 *Déterminer les inverses, lorsqu'il existent, des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & -a \\ a+1 & a-1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$