Matrices et applications linéaires

On rappelle que la notation $\star$ signifie que la notion introduite est aux limites du programme et ne doit pas être une priorité dans votre apprentissage.

1 Matrice d'une application linéaire

Définitions

- Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie , $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F et x un vecteur de F, on définit le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_F$ noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(x)$ par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $x = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$.

  Remarques:

  (a) Si $F = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}_F$ est la base canonique, on peut identifier x et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(x)$, ce n'est plus vrai dés que $\mathcal{B}_F$ est différente de la base canonique.

  (b) On étend pour une famille de vecteurs par $(y_1, \cdots, y_p)$ par

  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y_1, \cdots, y_p) = (y_{ij}),$$

  où $\forall j \in [1, n], \quad y_j = y_{1j} f_1 + \cdots + y_{nj} f_n$.

  La j-ème colonne est la décomposition sur la base $\mathcal{B}_F$ du vecteur y_j.

  Exemple: Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{K}_2[X]$,

  $$\mathcal{F} = \left(1, 1 + X, 1 + X + X^2, X + X^2\right).$$

  On a alors

  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c} \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  où $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$, mais aussi

  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  où $\mathcal{B}_1 = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$.

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie admettant respectivement les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ et u une application de $\mathrm{L}(E, F)$, on définit la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ par

  $$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = (m_{ij}),$$

  où $\forall j \in [1, p], \qquad u(e_j) = m_{1j} f_1 + m_{2j} f_2 + \cdots + m_{nj} f_n = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} f_k.$

Remarque: La j-ème colonne de la matrice m est formée du vecteur colonne des coordonnées de $u(ej)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Exemple: Soient $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \mathbb{K}_2[X]$ et l'application linéaire ψ de E dans F définie par $\psi(P) = P(X+1) - P(X)$, on calcule que dans les bases canoniques la matrice de ψ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2 Liens opératoires entre les applications linéaires et les matrices

Proposition 1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie admettant respectivement les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$, u une application de* $\mathrm{L}(E, F)$ *et x un vecteur de E, alors on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

Remarques:

1. On abrège la formule pour X vecteur colonne de x dans la base $\mathcal{B}_E$, Y vecteur colonne de $y = u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ et M matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, par
$$Y = MX.$$
2. En dimension finie, calculer le noyau d'une application linéaire u se ramène donc à résoudre le système linéaire associée à
$$MX = 0,$$
où M est la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, les solutions X donneront les coordonnées des vecteurs du noyau dans la base $\mathcal{B}_E$.

Proposition 2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie admettant respectivement les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathrm{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u). \end{array}$$

est isomorphisme d'espace vectoriel.

Remarques:

1. Il faut bien noter que les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont ici fixées.
2. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, étudier l'espace vectoriel $\mathrm{L}(E, F)$ devient équivalent à étudier l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3. Quand $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, par l'isomorphisme réciproque, on associe à une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$: $X \mapsto MX$.

Corollaire 1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors on a le $\mathbb{K}$-espace vectoriel* $\mathrm{L}(E, F)$ *est de dimension finie et*

$$\dim \mathrm{L}(E, F) = \dim E \dim F.$$

Remarques:

1. On en déduit que si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie , l'ensemble des endomorphismes de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $(\dim E)^2$.
2. On en déduit que si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie , l'ensemble des formes linéaires $\mathrm{L}(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\dim E$ et donc que E et $\mathrm{L}(E, \mathbb{K})$ sont isomorphes. ($\star$ Cette propriété n'est plus vraie, si E n'est pas de dimension finie)

Proposition 3. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$, $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ et $\mathcal{B}_G = (g_1, \cdots, g_q)$, u une application de $\mathrm{L}(E, F)$ et v une application de $\mathrm{L}(F, G)$, alors on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(v) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u).$$

Remarque: On abrège la formule par si M et N sont les matrices de v et u dans des bases adaptées alors la matrice de $v \circ u$ dans les bases correspondante est

$$MN.$$

3 Matrices inversibles et isomorphismes

Proposition 4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie admettant respectivement les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ et u une application de $\mathrm{L}(E, F)$, alors il y a équivalence entre*

(i) u un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .

(ii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est inversible.

Remarque: En utilisant l'isomorphisme canonique entre $\mathrm{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on démontre en particulier que si une matrice carrée M admet une matrice N inverse à droite (ou à gauche), elle est inversible et $M^{-1} = N$.

Proposition 5 (Matrice de passage)**.** *Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E, on appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$, la matrice de l'identité dans les bases $\mathcal{B}'_E$ et $\mathcal{B}_E$. C'est-à-dire*

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

où $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $e'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$. C'est la matrice dont la j-ème colonne est formée des composantes de e'_j dans la base $\mathcal{B}_E$ et on a

$$P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}(\mathrm{Id}_E).$$

Remarque: La j-ème colonne de P est le vecteur colonne coordonnée de e'_j dans la base B_E.

Exemple: Soient $E = \mathbb{K}^3$, $\mathcal{B}_c$ la base canonique de E et $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ un autre base, la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}_1$ est donc

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_c}(\mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(exercice calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}_E)$).

Proposition 6 (Changement de base)**.** *Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E et P la matrice passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$, alors si x est un vecteur de E de vecteurs colonnes coordonnées X dans $\mathcal{B}_E$ et X' dans $\mathcal{B}'_E$, on a*

$$X = PX'.$$

Proposition 7. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux bases de F et u une application* $\mathrm{L}(E, F)$*, alors on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{D}'}(u) &= (\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\mathrm{Id}_F)^{-1} (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(u)) (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{Id}_E) \\ &= (\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}\mathrm{Id}_F) (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(u)) (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

Corollaire 2 (cas d'une matrice d'endomorphisme)**.** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et u un endomorphisme de E, si M est la matrice de u dans $\mathcal{B}$, M' la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors on a*

$$M = PM'P^{-1}.$$

Exemple d'application :

Calcul des puissances d'une matrice

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associée :

(a) Cherchons les valeurs λ tel que l'application $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})$ soit non injective :
On cherche donc les λ tel que le système suivant possède une infinité de solutions :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (\lambda+1)x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & (1-\lambda)y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & (-\lambda-2)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -x & + & (1-\lambda)y & - & 3z & = & 0 \\ & & (1-(1+\lambda)(1-\lambda))y & + & (1-(1+\lambda)z & = & 0 \\ & & & & (-\lambda-2)z & = & 0 \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -x & + & (1-\lambda)y & - & 3z & = & 0 \\ & & \lambda(\lambda-2)y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & & & (-\lambda-2)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Comme le système obtenu est triangulaire, il y a un infinité de solutions si et seulement si la diagonale contient des zéros, c'est-à-dire si $\lambda \in \{0, -2, 2\}$.

(b) Pour $\lambda = 0$, on obtient le système soit

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

d'où $\mathrm{Ker}\ (\varphi) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De la même manière, on obtient

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi - 2\mathrm{Id}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(\varphi + 2\mathrm{Id}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) On a 3 vecteurs non coplanaires donc $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et par construction

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(d) Calculons la puissance de M.
Si on pose

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}\mathrm{Id},$$

où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\varphi)\,P^{-1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} M^n &= P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\varphi)\,\underbrace{P^{-1}P}_{\mathrm{I}_3}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\varphi)\,P^{-1}\cdots P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\varphi)\,P^{-1} \\ &= P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\varphi)^n\,P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}P^{-1} \end{aligned}$$

On calcule

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En rassemblant, on obtient

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & -2^{n-1} + (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Proposition 8. ⋆ *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, il y a équivalence entre*

(i) $\dim F = \dim E - 1$

(ii) F admet une droite vectorielle comme supplémentaire dans E.

(iii) F est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

On appelle hyperplan de E, un sous-espace vectoriel vérifiant une de ses propriétés.

Proposition 9. ⋆ *Soient f et g deux formes linéaires sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, il y a équivalence entre*

(i) f et g sont deux formes linéaires proportionnelles.

(ii) $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.

4 Rang d'une matrice

4.1 Définitions

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et φ_M l'application linéaire canoniquement associée, c'es-à-dire

$$\varphi_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & MX. \end{array}$$

- Le noyau de M noté $\operatorname{Ker} M$ comme le noyau de l'application φ_M.
- L'image de M noté $\operatorname{Im} M$ comme l'image de l'application φ_M.
- Le rang de M noté $\operatorname{rg} M$ comme le rang de la famille des vecteurs colonnes de M.

4.2 Propriétés

Proposition 10. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n, $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F et f une application linéaire de E dans F, alors*

$$\operatorname{rg}\,(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f) = \operatorname{rg} f.$$

Remarque: Ouf ! Il y a cohérence des définitions, si φ_M est l'application linéaire canoniquement associée à une matrice M, on a $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} \varphi_M$.

Cette proposition permet de transférer les propriétés des applications en particulier, celles découlant du théorème de rang.

Proposition 11. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors*

(i) $\operatorname{rg}\,(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$

(ii) si $\operatorname{rg} A = p$ *(c'est-à-dire si l'application canoniquement associée à A est injective), alors*

$$\operatorname{rg}\,(AB) = \operatorname{rg} B.$$

(iii) si $\operatorname{rg} B = p$ *(c'est-à-dire si l'application canoniquement associée à B est surjective), alors*

$$\operatorname{rg}\,(AB) = \operatorname{rg} A.$$

Corollaire 3. *Multiplier une matrice par une matrice inversible conserve le rang. C'est-à-dire, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors*

$$\operatorname{rg}\,(ABC) = \operatorname{rg} B.$$

Proposition 12. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ et A' une matrice échelonnée par lignes (ou par colonnes) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à q pivots, alors*

- *Si existe P une matrice carré d'ordre p inversible tel que $A' = AP$, alors* $\operatorname{rg} A = q$.
- *Si existe Q une matrice carré d'ordre n inversible tel que $A' = QA$, alors* $\operatorname{rg} A = q$.

Corollaire 4. *Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$, on a*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t\!A,$$

en particulier le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille composée de ses vecteurs lignes.

Remarque: En particulier, pour calculer le rang d'une matrice, on peut faire des opérations élémentaires sur les lignes comme sur les colonnes. Par contre, les opérations sur les colonnes font perdre la possibilité de revenir au système linéaire homogène associé.