Matrices d'une application linéaire

Exercice 1 *Donner la matrice de l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x,y,z) = (z,y,x)$ *dans les bases canoniques. Puis montrer que* $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1))$ *est une base. Donner la matrice de* f *dans* $\mathcal{B}$.

Exercice 2 *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *défini par*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$$

Justifier que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ *que représentent* A *et* B *vis à vis de* f *?*

Exercice 3 *Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés. (Il peut être également judicieux de vérifier la linéarité !).*

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x-y, x+2y, 3x-4y)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-y+2z, x-3y+z)$.
3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x, 3x, 4x)$.
4. $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = (X+1)P - X^2P'$.
5. $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = \left(X^2+1\right)P(1) - \left(X^2-1\right)P(-1)$.
6. $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(P) = (P(1), P'(1), P(-1))$.
7. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(x,y,z) = x(X-1)(X-2) + yX(X-2) + zX(X-1)$.

Exercice 4 *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *définie par* $\forall i \in \{1,\cdots,n\}$, $f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k$ *où* $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Donner la matrice de* f *dans* $\mathcal{B}$.

Exercice 5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, *montrer que l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *associé à* A *est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.*

Exercice 6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *on note* f *et* σ *les endomorphismes de* $E = \mathbb{R}^3$ *associés respectivement à* A *et* B *dans la base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. *Montrer que* f *est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.*
2. *Montrer que* σ *est un automorphisme de* E *qui vérifie* $(\sigma - Id_E)\circ(\sigma - Id_E) = 0$ *(on pourra utiliser cette relation, après l'avoir prouvée, pour en déduire le caractère bijectif de* σ, *ainsi que son inverse).*
3. *On pose* $g = f \circ \sigma$. *Montrer que* g *est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques. Que remarque t-on ?*
4. *Montrer que* $\sigma = f \circ g$, *en déduire une définition de* σ.

Exercice 7 *Soit* $E = \mathbb{R}_2[X]$ *et* $f : aX^2 + bX + c \longmapsto cX^2 + bX + a$. *Donner la matrice de* f *dans la base canonique. Montrer que* f *est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.*

Exercice 8 *On considère la matrice* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Soit* F *le sous ev de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *engendré par* I_3 *et* M, *prouver que* $\mathcal{B} = (I_3, M)$ *est une base de* F. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n \in F$, *et donner les coordonnées de* M^n *dans* $\mathcal{B}$.

Exercice 9 *Soit* $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \bigcirc & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *et f l'endomorphisme associé à M. A l'aide de f calculer M^2.*

Exercice 10 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et f l'endomorphisme canoniquement associé. On note $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, soit $(k,i) \in \{1, \cdots, n\}^2$, que vaut $f^k(e_i)$? En déduire f^n.*

Exercice 11 *Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $u(e_1) = e_2 - e_3$, $u(e_2) = e_3 - e_1$, $u(e_3) = e_1 - e_2$, quelle est la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer le noyau et l'image de u. Calculer A^2 , A^3 puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 12 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que*

$$B = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$ *et f l'application linéaire canoniquement associée de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Préciser p et q en fonction de n. Déterminer* $\operatorname{Im} f$ *et* $\ker f$.

Exercice 14 *Soit a, b, c trois réels dont un au moins est non nul, on définit*

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

1. *Quel est le rang de f ?*
2. *Déterminer* $\ker f$, $\operatorname{Im} f$, *en donner une base et préciser leur dimension.*
3. *A-t-on* $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ *?*

Changement de bases

Exercice 15 *Soit* $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & 0 & \operatorname{sh} x \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} x & 0 & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$ *où $x \in \mathbb{R}$, on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

1. *On pose* $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire A^n.*

Exercice 16 *Soit* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on note f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Caculer M^n à l'aide de f.*
2. *Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que* $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *(matrice diagonale).*

Exercice 17 *Soit A la matrice* $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ *de terme général* $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$, *pour i et $j \in \{0, \cdots, n\}$ (avec la convention classique : $i > j \Rightarrow \binom{j}{i} = 0$).*

1. *Ecrire A et l'inverser pour $n = 1$ et 2.*
2. *Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant A pour matrice, calculer $u(X^k)$ puis $u(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.*
3. *En déduire l'inverse de A, montrer que $A^{-1} = JAJ$ où J est diagonale à déterminer.*

Exercice 18 *Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, et φ définie par* $\varphi(P) = \left(X^2 - 1\right) P'(X) - 3XP(X)$.

1. *Montrer que l'on définit ainsi un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$. Donner sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$, on la notera M.*
2. *Montrer que* $\mathcal{B} = \left((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3\right)$ *est une base de E, donner la matrice D de φ dans cette base.*
3. *L'endomorphisme φ est-il injectif, surjectif, bijectif ?*
4. *Comment peut-on calculer M^n simplement.*