Al 1 - Logique

1 Propositions logiques

1.1 Définition et négation

Définition 1

1. On appelle **proposition** ou **assertion** une affirmation à laquelle on peut attacher une valeur de vérité : soit vraie soit fausse, pas les deux en même temps.
2. Soit P une proposition , on appelle **table de vérité** de P la table :

P
V
F

Exemple 1
« $1 + 1 = 2$ » est une proposition vraie.
« 7 est un entier pair » est une proposition fausse.

Remarque 1
On crée des propositions plus élaborées à l'aide des connecteurs logiques.
Certaines propositions mathématiques sont déclarées vraies a priori ; on les appelle alors des axiomes.
Toutes les autres propositions mathématiques qui ne sont pas des axiomes doivent résulter d'une démonstration.

Définition 2
A une proposition P, on peut associer sa négation notée non(P) (ou $\neg(P)$) qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

Remarque 2 Table de vérité

P	non(P)
V	F
F	V

1.2 Conjonction et disjonction

Définition 3
A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction de P et Q notée P et Q (ou $P \wedge Q$) qui est
– vraie si les deux propositions P et Q sont vraies ;
– fausse si l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.

Remarque 3 Table de vérité

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition 4
A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction de P et Q notée P ou Q (ou $P \vee Q$) qui est
– vraie si l'une au moins des deux propositions P et Q est vraie ;
– fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.

Remarque 4 Table de vérité

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 5 Le « ou » considéré ici n'est pas exclusif. La proposition P ou Q est vraie si l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie et non si exactement une des propositions est vraie.

1.3 Implication et équivalence

Définition 5
A deux propositions P et Q, on peut associer la proposition $P \implies Q$ qui est
– vraie si P est fausse ou si P et Q sont vraies ;
– fausse si P est vraie et Q fausse.

Remarque 6 Table de vérité

P	Q	P $\implies$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 7
Si P et $P \implies Q$ sont vraies alors nécessairement Q est vraie.

Remarque 8 Montrer qu'une implication est vraie
Pour montrer que $P \implies Q$ est vraie, il suffit de montrer que si P est vraie alors Q est vraie.

Remarque 9
– La notation logique $P \implies Q$ correspond en français à « si P alors Q ».
– L'implication $P \implies Q$ peut être vraie sans que P et Q le soient.
– L'implication $Q \implies P$ s'appelle la réciproque de l'implication $P \implies Q$.
Si une implication est vraie, sa réciproque ne l'est pas forcément.

Exemple 2
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
$(a = b) \implies \left(a^2 = b^2\right)$ est vraie alors que $\left(a^2 = b^2\right) \implies (a = b)$ est fausse en général.

Remarque 10
L'implication est transitive. Autrement dit :

$$((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$$

Définition 6
A deux propositions P et Q, on peut associer la proposition $P \iff Q$ qui est
– vraie si P et Q sont vraies ou si P et Q sont fausses ;
– fausse sinon.

Remarque 11 Table de vérité

P	Q	P $\Longleftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque 12
- Si P et $P \Longleftrightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie.
- Si Q et $P \Longleftrightarrow Q$ sont vraies alors P est vraie.

Remarque 13 Montrer qu'une équivalence est vraie
Pour montrer que $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que si P est vraie alors Q est vraie et si Q est vraie alors P est vraie.

Remarque 14
- La notation logique $P \Longleftrightarrow Q$ correspond en français à « P si et seulement si Q ».
- C'est cette notion d'équivalence qu'on utilise notamment pour résoudre des équations.

Exemple 3
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
$(a = b) \Longleftrightarrow \left(\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b\right)$ est vraie.

Remarque 15
- L'équivalence est symétrique, autrement dit

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \Longleftrightarrow P)$$

- L'équivalence est transitive. Autrement dit

$$((P \Longleftrightarrow Q) \quad \text{et} \quad (Q \Longleftrightarrow R)) \implies (P \Longleftrightarrow R)$$

Remarque 16 Montrer qu'une équivalence est vraie par les tables de vérité
Pour montrer que deux propositions dépendant des mêmes propositions P et Q sont équivalentes, il suffit de montrer qu'elles ont la même table de vérité.

Définition 7
Une proposition toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent est appelée **tautologie**.

Voici quelques exemples de tautologie :

Proposition 1
Soient P et Q deux propositions logiques. Alors on a :

1. $P \Longleftrightarrow \text{non}\,(\text{non}\,(P))$
2. $(P \implies Q) \Longleftrightarrow (\text{non}\,(Q) \implies \text{non}\,(P))$
3. $(P \implies Q) \Longleftrightarrow (\text{non}\,(P) \text{ ou } Q)$
4. $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P))$
5. $(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow (\text{non}\,(P) \implies Q)$

1.4 Conditions nécessaires et/ou suffisantes

Définition 8
Soient P et Q deux propositions.

1. On dit que Q est une condition nécessaire pour avoir P si, dès que P est vraie alors nécessairement Q est vraie. Autrement dit $P \implies Q$.
2. On dit que Q est une condition suffisante pour avoir P s'il suffit que Q soit vraie pour que P soit vraie. Autrement dit $Q \implies P$.
3. On dit que Q est une condition nécessaire et suffisante pour avoir P quand P est vraie si et seulement si Q est vraie. Autrement dit $P \iff Q$.

1.5 Règles de calcul propositionnel

Proposition 2 Distributivité

Soient P, Q et R trois propositions logiques. Alors on a :

1. $((P \text{ ou } Q) \text{ et } R) \iff ((P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R))$
2. $((P \text{ et } Q) \text{ ou } R) \iff ((P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R))$

Exemple 4

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \right).$$

Proposition 3 Lois de Morgan

Soient P et Q deux propositions logiques. Alors on a :

1. $\text{non}\,(P \text{ et } Q) \iff (\text{non}\,(P) \text{ ou non}\,(Q))$
2. $\text{non}\,(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}\,(P) \text{ et non}\,(Q))$

Proposition 4

Soient P et Q deux propositions logiques. Alors on a :

$$\text{non}\,(P \implies Q) \iff (P \text{ et non}\,(Q)).$$

1.6 En pratique

En pratique, dans une rédaction, on n'emploiera jamais $\implies$ et $\iff$ sauf peut-être dans les résolutions d'équations ou d'inéquations.
On préférera l'emploi de mots de français : conjonctions de coordination (mais, où, et, donc, or, ni, car), conjonctions de subordination (parce que, si, puisque, ...) ou adverbes (ainsi, cependant, ...).

2 Quantificateurs

2.1 Définition et exemples

Remarque 17

On travaille très souvent avec des propositions qui dépendent d'une variable x élément d'un certain ensemble E. On écrit alors $P(x)$ et on parle de prédicat. Il peut aussi y avoir plusieurs variables. C'est avec des prédicats qu'on utilise les quantificateurs.

Définition 9

On peut construire des propositions logiques (vraies ou fausses) à l'aide des quantificateurs suivants :
– Le symbole $\forall$ signifie « pour tout », « quel que soit ».

– Le symbole $\exists$ signifie « il existe ».
– Le symbole $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

Exemple 5

1. « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » est une proposition vraie.

2. « $\exists n \in \mathbb{N},\ n < 0$ » est une proposition fausse.

3. Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$f = g \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$$

Remarque 18 Ordre des quantificateurs
L'ordre des quantificateurs est important. On peut permuter l'ordre des plusieurs $\forall$ qui se suivent ou de plusieurs $\exists$ qui se suivent mais on ne peut pas permuter un $\forall$ et un $\exists$ sans changer le sens de la proposition.

Exemple 6

1. Notons $\mathbb{C}$ l'ensemble des cerises et $\mathbb{N}$ l'ensemble des noyaux.
$\forall c \in \mathbb{C},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n$ est dans c, ce qui signifie : dans toute cerise, il y a un noyau.
$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{C},\ n$ est dans c, ce qui signifie : il existe un noyau qui est dans toutes les cerises.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \geq x$ est vraie alors que $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \geq x$ est fausse.

2.2 Négation d'une proposition avec quantificateurs

En pratique, pour nier une proposition contenant des quantificateurs, on change les $\forall$ en $\exists$ et on prend la négation du reste.

Exemple 7

1. la négation de : $\forall x, \forall y,\ P(x, y)$ est $\exists x, \exists y,\ \text{non}\,(P(x, y))$.

2. la négation de : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ est $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$.

3. la négation de :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ (|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$

est :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in I,\ (|x - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon)$$

2.3 En pratique

Remarque 19 Prouver une proposition du type $\forall x \in A,\ P(x)$
La rédaction commence toujours par « Soit $x \in A$ ». Ce qui signifie que l'on se donne un élément x de A quelconque. Et on montre que $P(x)$ est vraie.

Remarque 20 Prouver une proposition du type $\exists x \in A,\ P(x)$
Il suffit de trouver un x de A tel que $P(x)$ est vraie.
Le plus souvent, au cours du raisonnement, on « trouve » ou on « construit » un x qui convient.

Remarque 21
Parfois, on prouve l'existence d'un x qui convient sans le trouver (preuves non constructives). Par exemple, le théorème de la bijection permet de montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $x\mathrm{e}^x = 1$, mais cela ne donne pas sa valeur.

Remarque 22 Utilisation d'une proposition commençant par $\forall$
Lorsqu'on sait que « $\forall x \in A, P(x)$ » est vraie, on peut alors utiliser $P(x)$ avec n'importe quel x de A ; et souvent, on choisit judicieusement un x particulier en fonction du but que l'on veut atteindre.

Remarque 23 Utilisation d'une proposition commençant par $\exists$
Lorsqu'on sait que « $\exists x \in A, P(x)$ » est vraie, il est indispensable d'écrire une phrase du type « Prenons x dans A tel que $P(x)$ est vraie » pour introduire un x qui marche. A priori, on ne sait rien d'autre sur cet x.

3 Méthodes de démonstration

3.1 Raisonnement par implication

C'est le type de raisonnement standard. On sait qu'une proposition P est vraie et que l'implication $P \implies Q$ est vraie. On en déduit que Q est vraie. On répète ceci autant de fois que nécessaire jusqu'à aboutir à la proposition dont on veut montrer qu'elle est vraie.
En pratique, la démonstration contiendra des mots comme « donc » , « ainsi » , etc ...

3.2 Raisonnement par double implication

Pour montrer que $P \iff Q$, on suppose P vraie et on montre que Q est vraie et réciproquement. La démonstration se fait donc en deux temps : une première débutant par « Supposons P et montrons Q »et une seconde débutant par « Supposons Q et montrons P ». On passe ensuite de P à Q et de Q à P en utilisant à chaque fois des implications.

3.3 Raisonnement par équivalence

Pour montrer que $P \iff Q$, on peut également procéder en une seule étape. On passe alors de P à Q en utilisant à chaque fois des équivalences (on utilise la transitivité de l'équivalence). Cette méthode est plus courte que la précédente (une seule étape au lieu de deux) mais peut aussi être plus fastidieuse puisqu'on doit vérifier que chaque enchaînement logique de la démonstration est bien une équivalence et pas seulement une implication. Le raisonnement par équivalence est généralement réservé à la résolution d'équations et d'inéquations. On lui préférera en général le raisonnement par double implication.

Remarque 24

1. Dans la majeure partie des cas, on demande de montrer des implications plutôt que des équivalences. Le raisonnement par équivalence est dans ce cas inutile et générateur d'erreurs logiques.
2. On ne mettra pas deux symboles $\iff$ sur la même ligne.
3. Le raisonnement par équivalence permet de montrer qu'une proposition est vraie en montrant qu'elle est équivalente à une proposition dont on sait déjà qu'elle est vraie.

3.4 Alternative

Pour montrer P ou Q, il est nécessaire et suffisant de montrer non $(P) \implies Q$. La rédaction est la suivante : « Supposons que P est fausse et montrons qu'alors Q est nécessairement vraie ».

3.5 Raisonnement par disjonction des cas

On veut montrer que $P \implies Q$ et on sait que $P \iff (P_1$ ou $P_2)$. Il est alors équivalent de montrer que $(P_1 \implies Q)$ et $(P_2 \implies Q)$.
On sépare l'hypothèse de départ P en différents cas possibles P_1 et P_2.

Remarque 25
On a considéré une disjonction en deux cas mais on peut évidemment considérer une disjonction en plus de deux cas.

3.6 Raisonnement par contraposition

On sait que $(P \implies Q) \iff (\text{non}\,(Q) \implies \text{non}\,(P))$, donc pour montrer $P \implies Q$, il est nécessaire et suffisant de montrer que $\text{non}\,(Q) \implies \text{non}\,(P)$: en pratique, on suppose que non(Q) est vraie et on montre que non(P) est vraie.

3.7 Raisonnement par l'absurde

Pour prouver qu'une proposition P est vraie, on montre que la proposition non(P) est fausse ; en pratique, on suppose que P est fausse et on aboutit à une contradiction.

Remarque 26
L'absurdité peut être quelque chose de faux dans l'absolu (on peut tomber sur $0 = 1$ par exemple), ou cela peut être une contradiction des hypothèses de départ. Il arrive qu'on contredise l'hypothèse non (P) par exemple !

3.8 Raisonnement par Analyse-synthèse

On suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires : c'est la phase d'analyse. On montre que ces conditions sont en fait suffisantes et on résout le problème : c'est la phase de synthèse.

Remarque 27

1. On a au passage prouvé l'unicité de la fonction paire et de la fonction impaire.
2. La phase analyse peut se faire au brouillon.

3.9 Raisonnement par récurrence

Proposition 5
Soit $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les entiers naturels.
Soit n_0 un entier naturel. On suppose que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
On suppose également, pour tout entier $n \geq n_0$, que l'implication $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

En pratique

1. On vérifie que n_0 satisfait la proposition : c'est le pas initial de la récurrence. La plupart du temps $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.
2. On se donne ensuite un entier $n \geq n_0$, et on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie (hypothèse de récurrence). On démontre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On exprime l'implication $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ en disant que $\mathcal{P}$ est héréditaire.
3. On conclut en annonçant, par récurrence (simple), la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 28

1. On n'est pas obligé de nommer la propriété.
2. Ne pas écrire « Notons $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \dfrac{1}{2^n}$ ». Cela n'a pas de sens car alors $\mathcal{P}(n)$ ne dépend pas de n.
3. Ne pas écrire « Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ » car il n'y a plus rien à démontrer.
4. Dans la phase d'hérédité, l'H.R. doit être utilisée.
5. Ne pas oublier l'initialisation

Proposition 6 Récurrence "faible"

Soit $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les entiers naturels.
Soit n_0 un entier naturel. On suppose que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies. On suppose également, pour tout entier $n \geq n_0$, que l'implication $(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)) \implies \mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

En pratique

1. On vérifie que n_0 et $n_0 + 1$ satisfont la proposition.
2. On se donne ensuite un entier $n \geq n_0$, et on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies (hypothèse de récurrence). On démontre alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
3. On conclut en annonçant, par récurrence (double), la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Proposition 7 Récurrence forte

Soit $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les entiers naturels.
Soit n_0 un entier naturel. On suppose que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
On suppose également, pour tout entier $n \geq n_0$, que l'implication :

$$(\mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ et } \ldots \text{ et } \mathcal{P}(n)) \implies \mathcal{P}(n+1)$$

est vraie.
Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

En pratique

1. On vérifie que n_0 satisfait la proposition.
2. On se donne ensuite un entier $n \geq n_0$, et on suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie pour tout entier k de $[n_0\,;\,n]$ (hypothèse de récurrence). On démontre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3. On conclut en annonçant, par récurrence (forte), la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.