AN 8 - Limites - Continuité

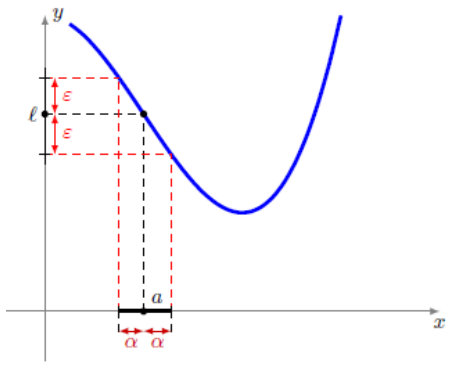
1 Limite d'une fonction

Définition 1 Limite finie en un point

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f **admet** $\ell \in \mathbb{R}$ **pour limite en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x-a| \leq \alpha \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon)\,.$$

On dit aussi que $f(x)$ **tend vers** $\ell \in \mathbb{R}$ **lorsque** x **tend vers** a.
On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.



Remarque 1

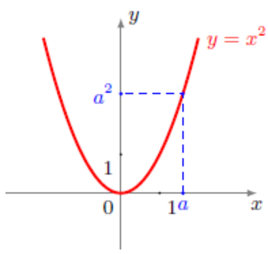
- L'inégalité $|x-a| \leq \alpha$ équivaut à $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$.
  L'inégalité $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.
- On peut remplacer certaines inégalités larges « $\leq$ » par des inégalités strictes « $<$ » dans la définition :

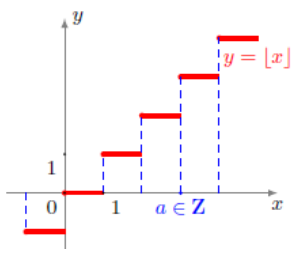
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x-a| < \alpha \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon)\,.$$

- L'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas permuter le $\forall \varepsilon$ avec le $\exists \alpha$: le α dépend en général du ε.

Exemple 1

1. $\lim\limits_{x \to 2}(2x-1) = 3$, $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$ $(a \in \mathbb{R})$,
2. la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite aux points $a \in \mathbb{Z}$.





Définition 2 Limite finie en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]x_0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, x_0[$.
On dit que f **admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en :**

1. $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \geq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2. $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \leq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 1 Unicité de la limite

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I.
Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

Théorème 2 Limite et caractère borné

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I.
Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Théorème 3 Limite en une valeur où f est définie

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $f(a) = \ell$.

Définition 3 Limite à gauche et à droite d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]c, a[\cup]a, b[$.

1. On appelle **limite à droite** en a de f la limite de la fonction $f_{\big|]a,b[}$ en a et on la note $\lim\limits_{a^+} f$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$.

2. On définit de même la **limite à gauche** en a de f, la limite de la fonction $f_{\big|]c,a[}$ en a et on la note $\lim\limits_{a^-} f$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$.

Théorème 4 Lien entre les limites

Soient f une fonction réelle définie sur un intervalle I, $a \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si la fonction f a une limite en a, alors ses limites à gauche et à droite en a coïncident et valent $\lim\limits_{a} f$.
Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en a, et si ces limites sont égales, alors f admet une limite en a.

$$\lim_{a} f = \ell \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell$$

Définition 4 Limite infinie en un point

1. On dit que f **a pour limite $+\infty$ en a** si :

$$\forall A > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x - a| < \alpha \implies f(x) > A)\,.$$

On note alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

2. On dit que f **a pour limite $-\infty$ en a** si

$$\forall A > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x - a| < \alpha \implies f(x) < -A)\,.$$

On note alors $\lim\limits_{a} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Théorème 5 Opérations sur les limites

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, a un point ou une extrémité de I (y-compris $\pm\infty$) et trois réels ℓ, ℓ' et λ.

1. Somme :

$\lim\limits_{x\to a} f$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2. Produit :

$\lim\limits_{x\to a} f$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}(fg)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

3. Multiplication par un réel non nul :

	$\lambda>0$			$\lambda<0$		
$\lim\limits_{x\to a} f$	$+\infty$	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	ℓ	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \lambda f$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$-\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$

4. Quotient (g ne s'annulant pas au voisinage de a) :

$\lim\limits_{x\to a} f$	ℓ	$\ell\neq 0$ ou $\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g$	$\ell'\neq 0$	0	$\ell'\neq 0$ ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$signe(fg)\infty$	0	F.I.	F.I

Remarque 2

L'abréviation F.I. désigne une forme indéterminée.
Quand la limite est une forme indéterminée cela signifie que l'on peut obtenir n'importe quel résultat.
Par exemple dans le cas du quotient de f par g définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=x^2$, $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f}{g}=1$;

2. $f(x)=x^2+x$ et $g=x$, $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f}{g}=+\infty$;

3. $f(x)=x$ et $g=x^2+x$, $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f}{g}=0$.

Théorème 6 Composition de limites

Soient $f : I \longrightarrow J$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $b\in\overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de J et $c\in\overline{\mathbb{R}}$.
Si $\lim\limits_{a} f=b$ et $\lim\limits_{b} g=c$, alors $\lim\limits_{a} g\circ f=c$.

Proposition 1 Limites classiques

On a les limites suivantes :

1. pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$;
2. pour tout $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$.

2 Limites et inégalités

Les théorèmes de ce paragraphe se démontrent de la même manière que pour les suites.

Théorème 7 Limites et inégalités larges
Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I.
Supposons que f et g admettent des limites finies en a.
Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f \leqslant \lim\limits_a g$.

Remarque 3
- En particulier, si f admet une limite finie en a :

$$(f(x) \leqslant m \text{ au voisinage de } a) \Longrightarrow \left(\lim_a f \leqslant m\right).$$

- **Attention :** si $f(x) < g(x)$ (resp. $f(x) < m$) au voisinage de a, on a simplement l'inégalité large $\lim\limits_a f \leqslant \lim\limits_a g$ (resp. $\lim\limits_a f \leqslant m$).

Théorème 8 Encadrement de la limite
Soient f, g et $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I tels qu'au voisinage de a :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h$, alors $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = \lim\limits_a h$.

Théorème 9 Limite monotone
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I et $m \in \mathbb{R}$.
1. Si $\lim\limits_a f > m$, alors $f(x) > m$ au voisinage de a.
2. Si $\lim\limits_a f < m$, alors $f(x) < m$ au voisinage de a.

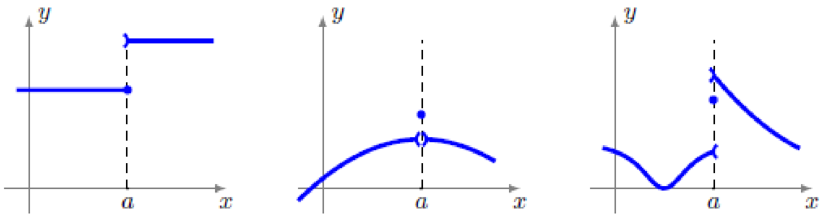
3 Continuité en un point

Définition 5 Continuité en un point
1. On dit que f est **continue** en $a \in I$ si f admet une limite finie en a, dans ce cas $\lim\limits_a f = f(a)$. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon).$$

2. On dit que f est **continue à droite** en $a \in I$ si f admet une limite finie en a^+, dans ce cas $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$.
3. On dit que f est **continue à gauche** en $a \in I$ si f admet une limite finie en a^-, dans ce cas $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$.

Visualisation :
La représentation graphique d'une fonction continue en a est tracée « sans lever » le crayon, ou encore « sans trou » au voisinage de a.
Voici des fonctions qui ne sont pas continues en a :



Théorème 10 Continuité / Continuités à gauche et à droite

Supposons f définie au voisinage de a à gauche et à droite.
On a l'équivalence entre :

1. f continue en a.
2. f continue à droite et à gauche en a.

Proposition 2 Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues en un point a, on a :

1. $f+g$, $f\times g$ et λf ($\lambda\in\mathbb{R}$) sont continues en a ;
2. si de plus $g(a)\neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a.

Proposition 3 Fonctions de référence

Les fonctions polynômiales, rationnelles, valeur absolue, sinus, cosinus, tangente, arcsinus, arccosinus, arctangente, exponentielles, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique, logarithmes, puissances sont continues en tout point où elles sont définies.

Proposition 4 Composition

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g\circ f$ est continue en a.

Définition 6 Prolongement par continuité

Soit f définie sur un intervalle I privé de a ($a\notin I$ et a est une extrémité de I) et admettant une limite finie en a.

La fonction g définie sur I par $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in I\\ \lim\limits_{a} f & \text{si } x=a\end{cases}$ est appelée **prolongement par continuité** de f en a.

Remarque 4

- On notera souvent par abus de notation ce prolongement par continuité f au lieu de g.
- f est prolongeable par continuité en une extrémité a de son intervalle de définition si, et seulement si, f admet une limite finie en a.

Exemple 2

On considère la fonction $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\end{array}\right.$.

f n'est pas définie en 0, mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant, si l'on note g le prolongement, $g(0)=0$.
On a ainsi :

$$g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\end{cases}\end{array}\right..$$

Théorème 11 Caractérisation séquentielle

Soient f une fonction définie sur I et $a \in I$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f continue en a ;
2. pour toute suite (u_n) d'éléments de I, si $u_n \longrightarrow a$ alors $f(u_n) \longrightarrow f(a)$.

Remarque 5
Une des applications de ce théorème est le résultat suivant :
Si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.
Par conséquent, si une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue, alors $u_n \to \ell$, entraîne que $f(\ell) = \ell$.

Théorème 12 Convergence d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue sur I et $\ell \in I$ et (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers ℓ et f **continue** en ℓ alors ℓ est solution de l'équation $\ell = f(\ell)$.

4 Continuité sur un intervalle

Définition 7 Continuité sur un intervalle

On dit que f est **continue sur un intervalle** I lorsque f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ ou $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 6
Si $I =]a, b]$, f continue sur I signifie que f est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en b.

Proposition 5 Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, on a :

1. $f + g$, $f \times g$ et λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ sont continues sur I ;
2. si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.

Proposition 6 Composition

Si f est continue sur un intervalle I, et g continue sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

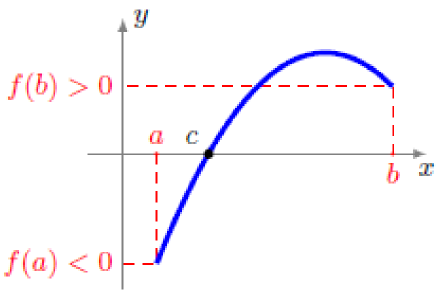
Théorème 13 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.
Autrement dit :
Pour tout $(a, b) \in I^2$, f prend prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque 7
- L'antécédent $c \in [a\,;\,b]$ tel que $y = f(c)$ n'est pas nécessairement unique.
- Si la fonction f n'est pas continue sur I ou que f est continue sur un domaine I qui n'est pas un intervalle, alors le théorème n'est plus valable.

Théorème 14 Théorème de Bolzano

Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Théorème 15 Théorème du point fixe

Soient un segment $I = [a\,;\,b]$ et $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue. Alors il existe au moins un point $c \in I$ tel que $f(c) = c$. Un tel point s'appelle **un point fixe**.

Remarque 8
Attention : si l'intervalle I n'est pas un segment, le théorème n'est pas valide.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur $I =]0, 1[$ vérifie bien $f(I) = I$, mais ne possède pas de point fixe dans cet intervalle.

Théorème 16 Image d'un segment par une application continue

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Autrement dit, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 17 Continuité et bijectivité

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f établit une bijection de I sur $f(I)$ et f^{-1} est une bijection continue et strictement monotone de $f(I)$ sur I variant dans le même sens que f.

5 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

On considère dans ce dernier paragraphe que f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie sur une partie I qui est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points ou une réunion de tels intervalles.

Définition 8 Limite finie en un point

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de I ou une extrémité de I.
Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f **admet** ℓ **pour limite en** a et on note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ si :

1. dans le cas $a \in \mathbb{R}$:
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,;$$
2. dans le cas $a = +\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad (x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,;$$
3. dans le cas $a = \infty$:
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad (x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,;$$

Remarque 9

- Les écritures sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$, la seule différence étant que $|f(x)-\ell|$ représente le module de $f(x)-\ell$.
- **Attention :** dans le cas présent des fonctions à valeurs complexes :
  - la notion de limite infinie n'a aucun sens.
  - De même, le passage des inégalités à la limites ou le théorème de l'encadrement n'ont aussi aucun sens.

Proposition 7 Limite et parties réelle et imaginaire

On a :

$$\lim_a f = \ell \iff \lim_a(\mathrm{Re}(f)) = \mathrm{Re}(\ell) \text{ et } \lim_a(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{Im}\,(\ell).$$

Théorème 18 Limite et caractère borné

Soit a un point ou une extrémité finie de I.
Si f admet une limite **finie** en a alors f est bornée au voisinage de a, autrement dit :

$$\exists M>0,\, \exists \alpha>0,\, \forall x \in I, (|x-a| \leq \alpha \implies |f(x)| \leq M)\,.$$

Définition 9 Continuité

Soit a un point ou une extrémité finie de I.

1. On dit que f est **continue** en $a \in I$ si $\lim_a f = f(a)$.
2. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I

Proposition 8 Continuité et parties réelle et imaginaire

Soit a un point ou une extrémité finie de I.
f est continue en a si, et seulement si, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont continues en a.
Plus généralement, f est continue sur I si, et seulement si, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont continues continue sur I.

Remarque 10
Dans le cas d'une fonction continue à valeurs complexes, le théorème des valeurs intermédiaires n'a pas de sens.