I - Les systèmes linéaires

Soit n, p des entiers naturels non nuls, $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, des éléments de $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un système linéaire de n équations à p inconnues est de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{1,2}\boldsymbol{x_2} & + & \dots & \dots & \dots + & a_{1,p-1}\boldsymbol{x_{p-1}} & + & a_{1,p}\boldsymbol{x_p} & = & b_1\\
a_{2,1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{2,2}\boldsymbol{x_2} & + & \dots & \dots & \dots + & a_{2,p-1}\boldsymbol{x_{p-1}} & + & a_{2,p}\boldsymbol{x_p} & = & b_2\\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & = & \vdots\\
a_{i,1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{i,2}\boldsymbol{x_2} & + & \dots + & a_{i,j}\boldsymbol{x_j} + & \dots + & a_{i,p-1}\boldsymbol{x_{p-1}} & + & a_{i,p}\boldsymbol{x_p} & = & b_i\\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & = & \vdots\\
a_{n,1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{n,2}\boldsymbol{x_2} & + & \dots & \dots & \dots + & a_{n,p-1}\boldsymbol{x_{p-1}} & + & a_{n,p}\boldsymbol{x_p} & = & b_n
\end{array}\right.$$

où les inconnues sont les variables $x_1,\dots,x_p$.
On appelle **système homogène associée** à (S) le système (SH) où le second membre est nul :

$$(SH)\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{1,2}\boldsymbol{x_2} & + & \dots & \dots & \dots + & a_{1,p-1}\boldsymbol{x_{p-1}} & + & a_{1,p}\boldsymbol{x_p} & = & 0\\
a_{2,1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{2,2}\boldsymbol{x_2} & + & \dots & \dots & \dots + & a_{2,p-1}\boldsymbol{x_{p-1}} & + & a_{2,p}\boldsymbol{x_p} & = & 0\\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & = & \vdots\\
a_{i,1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{i,2}\boldsymbol{x_2} & + & \dots + & a_{i,j}\boldsymbol{x_j} + & \dots + & a_{i,p-1}\boldsymbol{x_{p-1}} & + & a_{i,p}\boldsymbol{x_p} & = & 0\\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & = & \vdots\\
a_{n,1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{n,2}\boldsymbol{x_2} & + & \dots & \dots & \dots + & a_{n,p-1}\boldsymbol{x_{p-1}} & + & a_{n,p}\boldsymbol{x_p} & = & 0
\end{array}\right.$$

Résoudre (S), c'est trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des $p-$uplets $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ vérifiant (S).

II - Ecriture matricielle du système

On définit les matrices A et B suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

La matrice A possède n lignes et p colonnes ($A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$), la matrice B possède n lignes et 1 colonne ($B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
On dit que A est la matrice du système (S), et B la colonne des seconds membres.
On définit la matrice augmentée du système par :

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2\\ \vdots & & & \vdots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n\end{array}\right).$$

III - Opérations élémentaires sur les lignes

On applique, sur le système (S), les **opérations élémentaires** (sur les lignes) suivantes, le transformant en un système (S') :

- $(S)\underset{L_i\leftrightarrow L_j}{\Rightarrow}(S')$: échange des lignes L_i et L_j.
- $(S)\underset{L_i\leftarrow \lambda L_i}{\Rightarrow}(S')$: multiplication de la ligne L_i par la constante non nulle λ ($\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq 0$).

- $(S) \underset{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}{\Rightarrow} (S')$: ajout de la ligne λL_j à la ligne L_i où λ est un scalaire quelconque ($\lambda \in \mathbb{K}$).

Proposition : ces opérations donnent un système (S') équivalent au système (S).
Autrement dit, (S) et (S') ont le même ensemble de solutions.
On note donc $(S) \underset{L_i \leftarrow L_j}{\Leftrightarrow} (S')$ et $(S) \underset{L_i \leftarrow \lambda L_i}{\Leftrightarrow} (S')$ et $(S) \underset{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}{\Leftrightarrow} (S')$.
Définition : deux matrices A et A' sont dites **équivalentes par lignes** si elles se déduisent l'une de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes. Dans ce cas, on note $\boxed{A \underset{L}{\sim} A'}$.

IV - Matrice échelonnée par ligne

Définition : On dit qu'une matrice M est **échelonnée par lignes** si

1. si une ligne est nulle : toutes les lignes suivantes le sont également (i.e tous les coefficients de la ligne sont égaux à 0).
2. à partir de la deuxième ligne : chaque ligne non nulle commence par (strictement) plus de zéros que la ligne précédente.

Dans ce cas : on appelle « pivots de la matrice M » = les premiers coefficients non nuls de chaque ligne (lorsqu'ils existent).

Exemple : $M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & \boxed{9} & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{16} & 17 & 18 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{20} & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de pivots 1, 9, 16 et 20.

Définition : on dit qu'une matrice M est **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle, ou si

1. elle est échelonnée par lignes
2. tous ses pivots sont égaux à 1
3. si chaque **pivot** (égal à 1) est le **seul élément non nul de sa colonne**.

Exemple : $R = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où les $*$ représentent des **nombres quelconques**.

Résultat fondamental : **toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.**
Autrement dit, pour toute matrice M, il existe une et une seule matrice R, **échelonnée réduite par lignes**, qui soit équivalente par lignes à la matrice M (i.e) telle que $M \underset{L}{\sim} R$.
Preuve : l'algorithme du pivot permet d'assurer l'existence. Quant à l'unicité, elle est compréhensible (si $M \underset{L}{\sim} R$ et $M \underset{L}{\sim} R'$ alors $R \underset{L}{\sim} R'$, et visualiser ce que cela signifie sur un exemple pour se convaincre que, si $R \underset{L}{\sim} R'$ avec R et R' échelonées réduites par lignes, alors nécessairement $R = R'$).
Définition : on appelle **rang de la matrice M** le **nombre de pivots** (donc égaux à 1) dans sa **matrice échelonnée réduite R**.
Conséquence immédiate : si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors le rang de M est inférieur au nombre de lignes

et au nombre de colonnes de M i.e $\text{rang}(M) \leqslant n$ et $\text{rang}(M) \leqslant p$ donc $\boxed{\text{rang}(M) \leqslant \min(n,p)}$.
Remarque : si M est équivalente à une matrice échelonnée par lignes M', son rang est également le nombre de pivots de M'.

V - Résolution de systèmes linéaires

En notant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système d'équations linéaires (S) peut se ré-écrire : $(S) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow (A|B)$.
Remarque : en notant $A = (C_1|C_2|\dots|C_p)$ où les C_j sont les colonnes de la matrice A, alors le produit AX correspond à $A \times X = (C_1|C_2|\dots|C_n) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p$.

Par la méthode du pivot de Gauss (voir polycopié de cours/méthode) : on obtient $A \underset{L}{\sim} R$, où R est échelonnée réduite par lignes. En effectuant exactement les mêmes opérations élémentaires sur le second membre B, alors transformé en B', on a : $(\ (S) : AX = B\ ) \Leftrightarrow (\ (S') : RX = B'\ )$.
On peut représenter ces transformations à l'aide des matrices augmentées : $(A|B) \underset{L}{\sim} (R|B')$.
Sous cette dernière forme, il est aisé d'en déduire une description de $\mathcal{S}$, l'ensemble des solutions du système (S).
Rappel : $\boxed{n = \text{nombre d'équations (de lignes)}}$, $\boxed{p = \text{nombre d'inconnues (de colonnes)}}$, $\boxed{r = \text{rg}(A)}$.
Définition : on appelle **rang du système** $(S) : AX = B$, le rang de sa matrice A.
Trois cas possibles : on examine le système sous sa forme réduite $(S') : RX = B'$, i.e $(R|B')$.

1. S'il y a une ligne du type «$0 = \alpha$», avec $\alpha \neq 0$: on dit que le **système est incompatible**. Il ne possède pas de solution, l'ensemble des solutions est vide : $\mathcal{S} = \varnothing$.
2. Sinon, si $r = p$ (i.e) le rang = le nombre d'inconnues i.e $\text{rg}(A)$ = le nombre de colonnes de A : le système possède alors **une et une seule solution** $X_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}$.
On a $\mathcal{S} = \{X_0\} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_p)\}$.
3. Sinon, si $r < p$ (i.e) le rang < le nombre d'inconnues : il y a $(p - r)$ **paramètres libres** qui permettent de décrire les solutions (avec r inconnues principales). Le système possède alors **une infinité de solutions** paramétrées à l'aide de ces $(p - r)$ paramètres libres.

Résumé : étude du système $AX = B$ à p inconnues (i.e p colonnes pour A),

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{- soit incompatible :} & \text{pas de solution, } \mathcal{S} = \varnothing \\ \text{- soit compatible :} & \left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ si } \text{rg}(A) = p \text{, une seule solution, } \mathcal{S} = \{X_0 = (x_1, \dots, x_p)\} \\ \bullet \text{ si } \text{rg}(A) \neq p \text{, infinité de solutions paramétrée par } (p - \text{rg}(A)) \text{ paramètres libres.} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Un cas particulier : si le **système est carré** (i.e) $n = p$ (autant d'équations que d'inconnues, i.e la matrice A est carrée d'ordre n), et si le sytème est de rang n (i.e $n = p = r$), alors on dit que le système est **de Cramer**, et il possède **une et une seule solution**.
Remarque : on a le résultat suivant, pour une **matrice carrée** A à n lignes et n colonnes,

$$\boxed{(\text{rang de } A = n\ ) \Leftrightarrow (A \underset{L}{\sim} \mathrm{I}_n) \qquad (\text{où } A \text{ carrée } n \times n)}$$

où $\mathrm{I}_n = \text{diag}(1, 1 \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice diagonale (de 1) **(matrice identité/unité)**.

Remarque : I_n est la seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est échelonnée-réduite par ligne et de rang n.

VI - Structure de l'ensemble des solutions

On a l'implication :

$$\boxed{(X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont solutions de } (S) : AX = B) \Rightarrow ((X_1 - X_2) \text{ est une solution de } (SH) : AX = 0)}.$$

Donc : la différence de deux solutions du système (S) est une solution du sytème homogène (SH).
D'où l'on tire : si le système (S) n'est pas incompatible (i.e possède au moins une solution), soit X_0 une solution particulière de (S), alors

$$\boxed{\mathcal{S} = \text{« } X_0 + \mathcal{S}_H \text{ »}}.$$

Autrement dit, les solutions de (S) se décrivent par :
« une solution particulière de (S) + (toutes les solutions du système homogène associé (SH))».

VII - Deux résultats importants

Proposition 1 : un système $AX = B$ est compatible ssi le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice augmentée $(A|B)$: $\boxed{[AX = B \text{ compatible}] \Leftrightarrow [\text{rang}(A|B) = \text{rang}(A)]}$.
Autrement dit : un système $AX = B$ possède au moins une solution si et seulement si le rang de la matrice A est inchangé lorsqu'on lui «ajoute» la colonne B des seconds membres.

Exemple : le système $\begin{cases} x + 4y = 7 \\ 2x + 5y = 8 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$ possède au moins une solution car les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$ ont le même rang égal à $\underline{2}$ (calculs immédiats). Comme il y a $\mathbf{2}$ inconnues, on a $\mathbf{2} - \underline{2} = 0$ paramètre libre, donc une et une seule solution au système.
Mais si $B' = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\text{rg}(A|B') = 3 > 2 = \text{rg}(A)$, le système $\begin{cases} x + 4y = 7 \\ 2x + 5y = 8 \\ 3x + 6y = 10 \end{cases}$ n'a pas de solution.

Exemple : le système $\begin{cases} x + 4y + 7z = 4 \\ 2x + 5y + 8z = 5 \\ 3x + 6y + 9z = 6 \end{cases}$ possède au moins une solution car les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{array}\right)$ ont le même rang égal à $\underline{2}$ (calculs immédiats).
Comme il y a $\mathbf{3}$ inconnues, on a $\mathbf{3} - \underline{2} = 1$ paramètre libre, donc une infinité de solutions au système (ici une droite de l'espace car présence d'un seul paramètre libre).

Proposition 2 : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une **matrice carrée** (n lignes, n colonnes).
On a les équivalences :

$$\boxed{(\text{rang de } A = n \quad \text{i.e} \quad A \underset{L}{\sim} \mathrm{I}_n) \Leftrightarrow (AX = 0 \Rightarrow X = 0)}.$$

Autrement dit,

une matrice **carrée** A (d'ordre n) est de rang n

ssi

la seule solution du système **carré** homogène $AX = 0$ est la solution «triviale» $X = 0$.

Cette équivalence pour les matrices carrées est à retenir : on verra dans un prochain cours qu'elle permet de caractériser les matrices carrées inversibles.