LES RÉELS

I - Les ensembles de nombres

Définitions : on note

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ l'ensemble des nombres **entiers naturels**.
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ l'ensemble des nombres **entiers relatifs**.
- $\mathbb{D}$ = l'ensemble des **nombres décimaux** avec : $(x \in \mathbb{D}) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N},\ 10^n x \in \mathbb{Z})$.
  C'est l'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}$ = l'ensemble des **nombres rationnels**.
  C'est l'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $\mathbb{R}$ = l'ensemble des **nombres réels**. Remarque : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = l'ensembles des **irrationnels**.

On a les inclusions (strictes) : $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$.
Remarque : on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

II - Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

1) relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est ordonné : $\mathbb{R}$ est muni d'une **relation d'ordre total**, noté $\leqslant$. Ceci signifie :

- pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a soit $a \leqslant b$, soit $b \leqslant a$ *(ordre total)*
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $a \leqslant a$ *(réflexivité)*
- pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$ *(antisymétrie)*
- pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$ *(transitivité)*

Remarque : bien entendu, on définit $y \geqslant x$ lorsque $x \leqslant y$, et $a < b$ lorsque $a \leqslant b$ et $a \neq b$.

2) parties majorées/minorées dans $\mathbb{R}$

Définitions-propositions : soit A, une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e $A \subset \mathbb{R}$ et $A \neq \varnothing$. On a $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne **l'ensemble des parties de** $\mathbb{R}$ (l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{R}$).

- un réel M est **un majorant de** l'ensemble A si : $\forall a \in A,\ a \leqslant M$.
- un réel m est **un minorant de** l'ensemble A si : $\forall a \in A,\ m \leqslant a$.
- A est une **partie majorée** s'il existe un majorant de A, (i.e) si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M$.
- A est une **partie minorée** s'il existe un minorant de A, (i.e) si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ m \leqslant a$.
- A est une **partie bornée** s'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall a \in A,\ |a| \leqslant K$.
  On a l'équivalence : (A est bornée) $\Leftrightarrow$ (A est majorée et minorée).
- s'il existe **un majorant** M de A qui **appartient à** A, alors celui-ci est unique.
  On l'appelle **le maximum** de A, et on le note $\max(A)$. On a donc l'équivalence :
  $$\boxed{(M = \max(A)) \Leftrightarrow (M \text{ est un majorant de } A \text{ \underline{et} } M \in A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall a \in A,\ a \leqslant M \\ \underline{\text{et}}\ M \in A \end{pmatrix}}.$$
- s'il existe **un minorant** m de A qui **appartient à** A, alors celui-ci est unique.
  On l'appelle **le minimum** de A, et on le note $\min(A)$. On a donc l'équivalence :
  $$\boxed{(m = \min(A)) \Leftrightarrow (m \text{ est un minorant de } A \text{ \underline{et} } m \in A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall a \in A,\ m \leqslant a \\ \underline{\text{et}}\ m \in A \end{pmatrix}}.$$

3) borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définitions-propositions : soit A, une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e $A \subset \mathbb{R}$ et $A \neq \varnothing$.

- Si A est majorée et si elle existe, on appelle **borne supérieure de** A le **plus petit des majorants** de A, i.e le **minimum des majorants** de A.
  On la note $\sup(A)$. On a donc l'équivalence :
  $$\boxed{S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, S \text{ est un majorant de } A \\ \bullet\, S \text{ est le plus petit (le minimum) des majorants de } A \end{cases}}$$
  ou encore
  $$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, \forall a \in A,\ a \leqslant S \\ \bullet\ \text{ si } M \text{ est un majorant de } A, \text{ alors } S \leqslant M \end{cases}$$
  ou encore
  $$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, \forall a \in A,\ a \leqslant S \\ \bullet\ \text{ si } M_0 < S \text{ alors } M_0 \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases}$$
  ou encore
  $$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, \forall a \in A,\ a \leqslant S \\ \bullet\, \forall \varepsilon > 0,\ S - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases}$$
  ou encore
  $$\boxed{S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, \forall a \in A,\ a \leqslant S \\ \bullet\, \forall \varepsilon > 0,\ \exists a_0 \in A,\ S - \varepsilon < a_0 \leqslant S \end{cases}}$$
  Ainsi, pour prouver $s = \sup(A)$, il **faut** et il **suffit** de prouver
  * s est **un majorant** de A : $\forall a \in A,\ a \leqslant s$.
  * s est **le plus petit des majorants**, autrement dit : si $M_0 < s$, alors M_0 n'est pas un majorant de A, (i.e) il existe au moins un $a \in A$ tel que $M_0 < a$.

  Remarque : si A est non vide et majorée, on a l'implication :
  $$(M \text{ est un majorant de } A \text{ i.e } \forall a \in A,\ a \leqslant M) \Rightarrow (\sup(A) \leqslant M).$$
  Remarque : si une partie A admet un maximum $M = \mathrm{Max}(A)$, alors elle admet une borne supérieure et $\mathrm{Sup}(A) = M$, i.e $\boxed{\text{si } \mathrm{Max}(A) \text{ existe alors } \mathrm{Sup}(A) \text{ aussi et } \mathrm{Sup}(A) = \mathrm{Max}(A)}$.
  Complément : **caractérisation séquentielle** de la borne supérieure
  On montrera cette caractérisation dans un prochain chapitre :
  $$\boxed{S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, S \text{ est un majorant de } A \\ \bullet \text{ il existe une suite } (u_n) \text{ d'éléments de } A \text{ qui converge vers } S \end{cases}}.$$

- Si A est minorée et si elle existe, on appelle **borne inférieure de** A le **plus grand des minorants** de A, i.e le **maximum des minorants** de A.
  On la note $\inf(A)$. On a donc l'équivalence :
  $$\boxed{I = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, I \text{ est un minorant de } A \\ \bullet\, I \text{ est le plus grand (le maximum) des minorants de } A \end{cases}}$$
  ou encore
  $$I = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, \forall a \in A,\ I \leqslant a \\ \bullet\ \text{ si } m \text{ est un minorant de } A, \text{ alors } m \leqslant I \end{cases}$$
  ou encore
  $$I = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, \forall a \in A,\ I \leqslant a \\ \bullet\ \text{ si } m_0 > I \text{ alors } m_0 \text{ n'est pas un minorant de } A \end{cases}$$
  ou encore
  $$I = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, \forall a \in A,\ I \leqslant a \\ \bullet\, \forall \varepsilon > 0,\ I + \varepsilon \text{ n'est pas un minorant de } A \end{cases}$$
  ou encore
  $$\boxed{I = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\, \forall a \in A,\ I \leqslant a \\ \bullet\, \forall \varepsilon > 0,\ \exists a_0 \in A,\ I \leqslant a_0 < I + \varepsilon \end{cases}}$$

Bien entendu, on a également :

$$\boxed{S = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ S \text{ est un minorant de } A \\ \bullet \text{ il existe une suite } (u_n) \text{ d'éléments de } A \text{ qui converge vers } S \end{cases}}.$$

4) propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Propriété essentielle (admise) : $\mathbb{R}$ possède la **propriété de la borne supérieure**.
Autrement dit :
« Toute partie **non vide** et **majorée** de $\mathbb{R}$ possède **une borne supérieure** ».

Ainsi : $\boxed{\left.\begin{array}{c} A \subset \mathbb{R} \text{ et } A \neq \varnothing \\ A \text{ majorée (par } M) \end{array}\right\} \Rightarrow \ \sup(A) \text{ existe (et } \sup(A) \leqslant M)}$.

On en déduit facilement le résultat suivant, concernant l'existence de bornes inférieures :
« Toute partie **non vide** et **minorée** de $\mathbb{R}$ possède **une borne inférieure** ».

Ainsi : $\boxed{\left.\begin{array}{c} A \subset \mathbb{R} \text{ et } A \neq \varnothing \\ A \text{ minorée (par } m) \end{array}\right\} \Rightarrow \ \inf(A) \text{ existe (et } m \leqslant \inf(A))}$.

III - Rappels : la valeur absolue

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est : $\boxed{|x| = \mathrm{d}(0,x) = \begin{cases} +x & \text{si } 0 \leqslant x \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$.

Rappels : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

- $|x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$ **(double inégalité triangulaire)**
- $\boxed{|\,|x| - |y|\,| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|}$ **(généralisation)**
- $(\ |x+y| = |x| + |y|\ ) \Leftrightarrow (\ 0 \leqslant xy$ (i.e) x et y ont le même signe $)$ **(cas d'égalité)**

Remarque : $\max(x,y) = \max\{x,y\} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x,y) = \min\{x,y\} = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

IV - La partie entière

Définition : pour tout réel x, on appelle et on note

$\boxed{\lfloor x \rfloor = \textbf{partie entière de } x = \textbf{le plus grand entier} \text{ relatif qui est } \textbf{inférieur ou égal à } x}$.

Conséquence : $\boxed{\begin{pmatrix} m \leqslant x \\ m \text{ est un entier} \end{pmatrix} \Rightarrow (m \leqslant \lfloor x \rfloor)}$.

Caractérisation : $\boxed{p = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bullet & p \in \mathbb{Z} \\ \bullet & p \leqslant x < p+1 \end{pmatrix}}$.

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1}$ et $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x}$.
- $(x = \lfloor x \rfloor) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Z})$
- la fonction «partie entière» $(x \mapsto \lfloor x \rfloor)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \text{ } \underline{\text{si}} \text{ } n \text{ est un entier quelconque}}$.
- la fonction $F : x \mapsto F(x) = x - \lfloor x \rfloor$ est $1-$périodique sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1[$.
  Pour tout réel x, on peut écrire $x = \lfloor x \rfloor + F(x)$ où $F(x) \in [0,1[$ (partie fractionnaire de x).

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor \text{ \underline{si} } n \text{ est un \textbf{entier positif}}}$ (faux en général si $n \in \mathbb{Z}$).
  Remarque : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lfloor x + y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
- $\lfloor x \rfloor \underset{\pm\infty}{\sim} x$.

V - Approximations décimales d'un réel

Proposition : pour tout réel x, il existe deux suites de **nombres décimaux** (donc de rationnels car $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n \geqslant 0}$ telles que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant x \leqslant v_n \text{ avec } |v_n - u_n| \leqslant 10^{-n}}$.
Ainsi, à n fixé,

- u_n est une **approximation décimale** du réel x à 10^{-n} **par défaut** (car $u_n \leqslant x \leqslant u_n + 10^{-n}$)
- v_n est une **approximation décimale** du réel x à 10^{-n} **par excès** (car $v_n - 10^{-n} \leqslant x \leqslant v_n$).

Un exemple : pour tout x réel, on définit $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ (nombres décimaux).
On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = 10^{-n}$ et $u_n \leqslant x \leqslant v_n$. On montre : la suite u est croissante, la suite v décroissante, et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$, donc les deux suites sont adjacentes, et convergent vers x.
Conséquence : entre deux réels distincts, il y a au moins un nombre rationnel (et au moins un nombre irrationnel). Ce qui permet d'en déduire : entre deux réels distincts, il y a une infinité de nombres rationnels (et une infinité de nombres irrationnels). Autrement dit : tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ *rencontre* $\mathbb{Q}$ (et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) i.e si $x < y$ (réels) alors $]x, y[\cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ (et $]x, y[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$).
Autre conséquence : pour tout réel x,

- il existe une suite $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n \in \mathbb{Q} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} (r_n) = x.$$
- il existe une suite $i = (i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'irrationnels qui converge vers x :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ i_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} (i_n) = x.$$

VI - Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition : si a et b sont deux réels , alors on définit le **segment** $[a, b]$ comme l'ensemble des réels x vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$. Ainsi : $\boxed{[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}}$.
Remarque : si λ parcourt $[0, 1]$ alors $a + \lambda(b - a)$ parcourt $[a, b]$. Le segment $[a, b]$ est donc l'ensemble des nombres m_λ de la forme
$$m_\lambda = a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b, \text{ avec } \lambda \text{ parcourant } [0, 1].$$
Par conséquent : $\boxed{[a, b] = \{m_\lambda = (1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\}}$.
Définition des intervalles par la convexité :

$$\boxed{\text{une partie } X \text{ de } \mathbb{R} \text{ est un \textbf{intervalle} si, pour tous } a \text{ et } b \text{ dans } X, \text{ on a } [a, b] \subset X}.$$

Ainsi :
$$(X \text{ est un intervalle}) \text{ \underline{ssi} } (\forall (a, b) \in X^2,\ \forall \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)a + \lambda b \in X).$$

Catalogue : voici le catalogue des intervalles de $\mathbb{R}$ (a et b désignent deux réels vérifiant $a \leqslant b$).
Intervalles fermés :
• $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ *(segment)* • $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$ • $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$
Intervalles ouverts (ici, nécessairement $a < b$) :
• $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ • $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ • $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
Intervalles ni ouverts, ni fermés (ici, nécessairement $a < b$) :
• $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ • $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
Intervalles ouverts et fermés :
• l'ensemble vide $\varnothing$ • l'ensemble des réels $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$