Majoration d'intégrales

Exercice 1 *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$*, que dire d'une fonction continue telle que* $\displaystyle\int_a^b f = (b-a)\sup_{[a,b]} |f|$.

Exercice 2 *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* f *une fonction continue sur* $[a,b]$ *telle que* $\displaystyle\int_a^b |f| = \left|\int_a^b f\right|$. *Montrer que* f *garde un signe constant.*

Exercice 3 *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue d'intégrale nulle sur* $[0,1]$*. On pose* $m = \inf\limits_{[0,1]} f$ *et* $M = \sup\limits_{[0,1]} f$ *(justifier l'existence de* m *et* M*). Que dire de la fonction* $g = (M-f)(f-m)$ *? En déduire l'inégalité* $\displaystyle\int_0^1 f^2 \leq -mM$*, puis que* f *s'annule au moins une fois.*

Exercice 4 *Soient* $a < b$ *deux réels,* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) et* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$*. On suppose que* $\forall x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leq g'(x)$.

1. *Que vaut* $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$ *? En déduire que* $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.
2. *Quel résultat retrouve-t-on si* f *est à valeurs réelles et si* $g' = C$ *est constante ?*

Exercice 5 *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *continue, non identiquement nulle et telle que* $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$*. Montrer que* $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1$.

Exercice 6 *Soit* f *continue sur* $[a,b]$ *avec* $a < b$ *telle que* $\displaystyle\int_a^b f = 0$*. Montrer que* f *s'annule au moins une fois sur* $[a,b]$ *:*

1. *En raisonnant par l'absurde.à l'aide du TVI.*
2. *En utilisant le théorème de Rolle appliqué à une autre fonction que* f *!*

Application : *En déduire que si* f *est continue vérifie* $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$*, alors* f *admet un point fixe (i.e* $\exists a \in [0,1]$ *tel que* $f(a) = a$*).*

Exercice 7 *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n \arctan t}{\sqrt{1+t^2}} dt = 0.$

Exercice 8 *On considère la suite* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\pi^n}\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x)^n dx$*, déterminer la limite de* u.

Exercice 9 *On définit pour* $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{n+x} dx$*. Donner la limite, puis un équivalent de* u_n.

Exercice 10 *On considère la suite* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$*, déterminer la limite de* u.

Exercice 11 *On considère la suite* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^n x^n e^{-nx} dx$*, déterminer la limite de* u.

Exercice 12 *Soient* u *et* v *les suites définies par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = n\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx$ *et* $u_n = n\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$*. Déterminer la limite de* v_n*,. En étudiant* $|v_n - u_n|$ *déduire celle de* u_n.

Exercice 13 *Etudier la convergence de la suite* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ *puis donner un équivalent simple de* $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln\left(1+x^2\right) dx$.

Exercice 14 *On pose* $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n x dx$, *montrer que la suite* $(I_n)_n$ *est décroissante. Etablir une relation de récurrence vérifiée par cette suite. Montrer que* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, préciser sa limite (on pourra poser* $u = \ln x$, *puis majorer* I_n*). Que vaut* $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ *? En déduire un équivalent de* I_n.

Exercice 15 *Soit* f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$, *on pose* $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$. *Déterminer la limite de* I_n *puis un équivalent.*

Exercice 16 *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k^p}$ *et* $I_n(p) = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$.

1. *Montrer, pour tout entier* $k \geq 1$, $\dfrac{1}{(k+1)^p} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \frac{1}{k^p}$.
2. *En déduire que pour tout entier* $n \geq 2$ *:*
$$S_n(p) - 1 \leq I_n(p) \leq S_{n-1}(p)$$
puis que la suite $(S_n(p))_{n\geq 1}$ *converge si et seulement si* $p \geq 2$.

Exercice 17 *Soit* f *une fonction de classe* C^1 *sur* $[a,b]$. *avec* $a < b$. *Montrer que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt$ *tendent vers* 0 *quand* $|\lambda|$ *tend vers* $+\infty$. *(lemme de Riemann-Lebesgue).*

Exercice 18 *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *telle que* $\forall k \in \{0,\cdots,n-1\}$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t) = 0$. *Montrer que* f *s'annule au moins* n *fois sur* $[a,b]$.

Exercice 19 *Formules de la moyenne.*

1. *Soit* f *continue sur* $[a,b]$ *avec* $a<b$, *montrer qu'il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$.
2. *Généralisation : Soient* f *et* g *continues sur* $[a,b]$, $a<b$ *avec* g *positive sur* $[a,b]$, *montrer qu'il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$.
3. *Application :*
   - *Déterminer la limite lorsque* u *tend vers* 0^+ *de* $\displaystyle\int_u^{2u} \frac{\cos x}{x}dx$.
   - *Si* f *est continue au voisinage de* 0, *déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt$.
   - *Si* f *est continue au voisinage de* 0, *montrer que* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}dt = f(0)\ln 2$.

Exercice 20 *On définit pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$.

1. *Calculer* u_0, u_1 *et simplifier pour* $n \in \mathbb{N}$ *la somme* $u_n + u_{n+2}$.
2. *Montrer que la suite est monotone et en déduire la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. *On définit les suites* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ *et* $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. *Exprimer* T_n *et* $\dfrac{1}{2}S_n$ *à l'aide de la suite* u. *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.
   Remarque *: on en déduit que* $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$, *cette formule est dite de Gregory (1638-1675), cependant on la trouve déjà en 1410 en Inde dans un traité de Madhava.*

Exercice 21 *Soit* $A(X) = X(1-X)$, *montrer que* $\forall x \in [0,1],\ 0 \le A(x) \le \dfrac{1}{4}$.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *montrer qu'il existe un unique polynôme* $P_n \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $A^{4n}(X) = \left(1+X^2\right)P_n(X) + (-1)^n 4^n$. *(Penser en terme de reste d'une division euclidienne !).*

2. *On pose alors* $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}} \displaystyle\int_0^1 P_n(x)dx$, *montrer que* $|\pi - a_n| \le \dfrac{1}{4^{5n-1}}$.

Sommes de Riemann

Exercice 22 *Déterminer les limites des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$
\begin{array}{llllll}
(1) & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) & (2) & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{n}{n^2+k^2} & (3) & \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k e^{-k/n} \\
(4) & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} & (5) & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k^2} & (6) & \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}
\end{array}
$$

Exercice 23 *Déterminer pour* $x \neq 0$, *la limite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2x^2}$.

Exercice 24 *Donner un équivalent des suites définies par*

$$
(1)\quad u_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \qquad (2)\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} k^p \text{ où } p \in \mathbb{N} \qquad (3)\quad u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+(n-k)^2}
$$

Exercice 25 *Calculer la limite de*

$$
\frac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}
$$

Exercice 26 *Calculer la limite de* $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 27 *Déterminer la limite de* $\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}}$.

Exercice 28 *Déterminer la limite de* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\dfrac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 29 *Soit* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$ *et* $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$

1. *Nature et limite de la suite* $(S_n)_n$.

2. *Nature et limite de la suite* $(U_n)_n$. *(On pourra comparer* U_{2n} *et* S_n *).*

Exercice 30 *Soit*

$$
u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}
$$

déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(Indication : il y a un* 1 *de trop !).*

Exercice 31 *Soit* f *continue sur* $[0,1]$, *déterminer la limite de* $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx$.

Exercice 32 *Soit* $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, *on pose* $f(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)dt$.

1. *Déterminer Df.*
2. *Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^n - 1$.*
3. *Calculer $f(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.*

Exercice 33

1. *Montrer que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$*
2. *Déterminer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$*

Exercice 34 *Déterminer la limite de $u_n = n^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(1^1 2^2 3^3 \cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}$*

Exercice 35 *On définit f et φ sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f : P \longmapsto \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right]$ et $\varphi : P \longmapsto P(1)$.*

1. *Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$.*
2. *Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n(P) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$.*
3. *En déduire que $\varphi(f^n(P)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.*

Exercice 36 *On désire déterminer la limite de*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n^2 + nk + 2011}$$

1. *S'agit-il d'une somme de Riemann ?*
2. *Simplifier*
$$\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} - \frac{2011}{n^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{2011}{n^2}\right)}$$
3. *Conclure.*

Exercice 37 *Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ où $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$.*

Théorème fondamental

Exercice 38 *Pour $x > 0$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$, justifier que f est dérivable, déterminer f' puis f. Retrouver le résultat avec le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.*

Exercice 39 *On définit la fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.*

1. *Déterminer son ensemble de défintion, sa parité.*
2. *Déterminer ses variations et ses limites aux bords. Donner un équivalent de f en 0.*
3. *Montrer que $f\left(\dfrac{1}{2x}\right) = f(x)$ et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.*

Exercice 40 *Soit f continue sur $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^c f(t)\,dt = (b-c)\,f(c)$. (utiliser $g(x) = (b-x)\int_a^x f(t)\,dt$).*

Exercice 41 *Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x \cos(x-t)\,f(t)\,dt$, montrer que F est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et que F est solution de l'équation différentielle $y'' + y = f'$.*
Application : Trouver les applications f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2\int_0^x \cos(x-t)\,f(t)\,dt = 1$.

Exercice 42 *Trouver les applications continues f telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \int_0^x t f(t)\,dt = 1$.*

Exercice 43 *Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs positives. On suppose f décroissante et $g(x) \leq 1$ sur $[a,b]$.*

1. *Montrer que*
$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t)\,dt \text{ où } \lambda = \int_a^b g(t)\,dt$$
(On pourra poser $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$,$h(x) = \int_a^x f(t)\,g(t)\,dt$, $\lambda(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ et $k(x) = \int_a^{a+\lambda(x)} f(t)\,dt$)
2. *Application : $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $a = 0$, $b = \tan(u)$ où $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, en déduire que $\forall u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{\sin(2u)}{4} + \dfrac{u}{2} \leq \arctan(u)$.*

Exercice 44 *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq f'(x) \leq 1$.*
Pour $x \geq 0$, on pose $g(x) = \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$

1. *Etudier les variations de g, en déduire que $\forall x \geq 0$, $\left(\int_0^x f\right)^2 \geq \int_0^x f^3$*
2. *Déterminer les applications f telles que $g = 0$.*

Exercice 45 *Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telle que $f(0) = 0$.*

1. *On définit g sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(x)\coth(x)$, montrer que l'on peut prolonger g en une fonction continue sur $[0,+\infty[$ (fonction notée encore g).*
2. *On définit F et G sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) dt - f(x)^2 \coth(x)$ et $G(x) = \int_0^x (f'(t) - g(t))^2\,dt$. Justifier que F et et G sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et déterminer leur dérivée.*
3. *Déterminer les limites de F et G en 0^+, en déduire que*
$$\forall x > 0,\ f(x)^2 \leq \operatorname{th}(x) \times \int_0^x \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) dt$$
et qu'il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{sh}$.

Formule de Taylor

Exercice 46 *A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que*

$$\forall x \geq 0,\quad \operatorname{sh} x \geq x + \frac{x^3}{6} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\quad \operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$$
$$\forall x \in [0,\pi] \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$