**Lycée Faidherbe**
**Lille**

# *PCSI*
# Trigonométrie

**2017 – 2018**

$x$ désigne un nombre réel.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

# I Rappels

## 1 Définition

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon 1.

Le **cosinus** du nombre $x$ est l'abscisse du point $M$ de $\mathcal{C}$ telle que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ admette $x$ comme mesure (en radians). Le **sinus** est l'ordonnée de ce même point $M$.

La **tangente** et la **cotangente** de $x$ sont les rapports (quand ils existent) :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ pour } x \neq 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

## 2 Résultats élémentaires

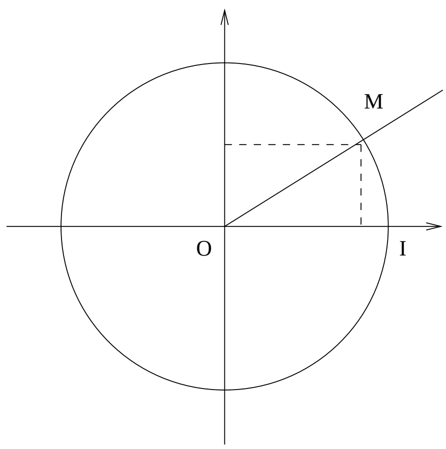
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

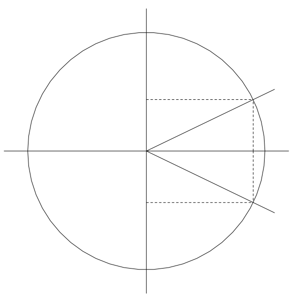
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ pour } x \neq 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$




## 3 Angles associés

### Angles opposés

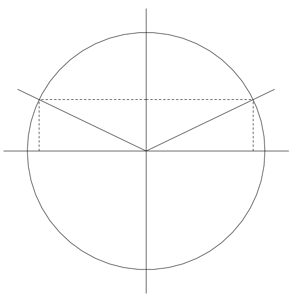


$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

### Angles supplémentaires

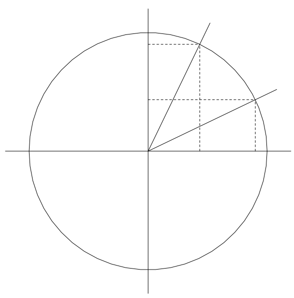


$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

### Angles complémentaires

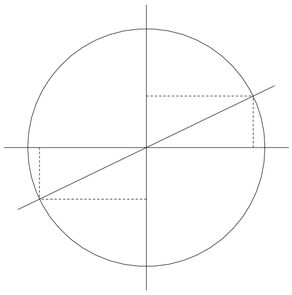


$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotan} x$$

**Angles qui diffèrent de $\pi$**

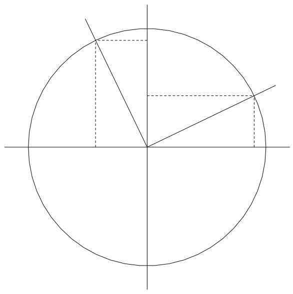


$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

**Angles qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$**



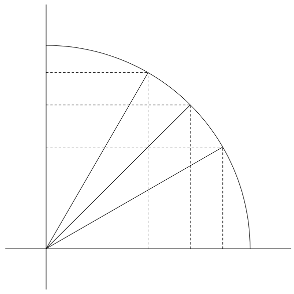
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotan} x$$

## Valeurs importantes

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | N D |



## 4 Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x
\end{aligned}$$

## 5 Formules de duplication

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 1 - 2\sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x - 1 \\
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x
\end{aligned}$$

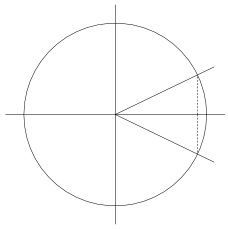
## 6 Formules de linéarisation

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))
\end{aligned}$$

## 7 Équation $\cos x = \cos a$

Les solutions de l'équation sont données par :

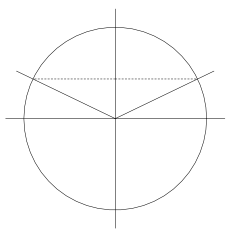
$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = a \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -a \ [2\pi] \end{cases}$$



## 8 Équation $\sin x = \sin a$

Les solutions de l'équation sont données par :

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x = \pi - a \ [2\pi] \end{cases}$$



# II Compléments

## 1 Équation $\tan x = \tan a$

Les solutions de l'équation sont données par :

$$\tan x = \tan a \iff x = a\ [\pi]$$

## 2 Formules d'addition et de duplication

Quand cela a un sens :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

## 3 Expression en fonction de la tangente de l'arc moitié

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient quand cela a un sens :

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

## 4 Transformation de produits en sommes

$$\begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \end{aligned}$$

## 5 Tranformation de sommes en produits

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

# III Utilisation des complexes

## 1 Linéarisation de $\cos^m\theta\sin^n\theta$

Utiliser les formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Développer (formule du binôme), regrouper puis faire apparaître des $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ grâce aux formules d'Euler. Exemples :

$$\begin{aligned} \cos^3\theta &= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta \\ \sin^3\theta &= -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta \\ \cos^4\theta &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta \\ \sin^4\theta &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta \\ \cos^2\theta\sin^3\theta &= \frac{1}{8}\sin\theta + \frac{1}{16}\sin 3\theta - \frac{1}{16}\sin 5\theta \end{aligned}$$

## 2 Expression de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Utiliser la formule de Moivre : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ (i.e) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
Développer le terme de gauche de l'égalité à l'aide de la formule du binôme, puis en identifiant les parties réelles et imaginaires, tirer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ comme une combinaison de produits de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exemples :

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

Compléments :

$1 + e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$
D'où l'on tire, en prenant les parties réelles :
$1 + \cos\theta = 2\cos^2(\frac{\theta}{2})$ et $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$

| | |
|---|---|
| $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ définie si $x \neq \dfrac{\pi}{2} \ (\pi)$ | $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ définie si $x \neq 0 \ (\pi)$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ | $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ si $x \neq \dfrac{\pi}{2} \ (\pi)$ | $1 + \operatorname{cotan}^2(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ si $x \neq 0 \ (\pi)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos(-a) = \cos(a)$ | $\sin(-a) = -\sin(a)$ | $\tan(-a) = -\tan(a)$ | $\operatorname{cotan}(-a) = -\operatorname{cotan}(a)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ | $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ | $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ | $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ |
| $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ | $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ | $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ | $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ |
| $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ | $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotan}(x)$ | $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ | $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotan}(x)$ |

Valeurs remarquables :

| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| sin | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ |
| tan | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\Vert$ | $-\sqrt{3}$ | $0$ |

Formules d'addition

| | |
|---|---|
| $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ | $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ |
| $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ | $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ |
| $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ | $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$ |

En particulier on a les relations suivantes avec l'angle double :

| |
|---|
| $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ |
| $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ |

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

| |
|---|
| $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$ |
| $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$ |

On dispose également de relations avec la tangente de l'angle moitié.

Si $a \neq \pi \ (2\pi)$, on pose $t = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$ alors

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(a) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ | $\sin(a) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ | $\tan(a) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ |

Formules de linéarisation :

| |
|---|
| $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$ |
| $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$ |
| $\sin(a)\sin(b) = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$ |

| |
|---|
| $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ |
| $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ |
| $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ |
| $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ |

Equations trigonométriques

| |
|---|
| $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \quad (2\pi) \\ a = -b \quad (2\pi) \end{cases}$ |
| $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \quad (2\pi) \\ a = \pi - b \quad (2\pi) \end{cases}$ |
| $\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b \quad (\pi)$ |

Lien avec l'exponentielle complexe

| |
|---|
| $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ |

| | |
|---|---|
| $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ | $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ |

| | |
|---|---|
| $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ | $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ |
| $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ | $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ |