EXERCICE 1 :

Montrer que pour tout $x \in]0;1[$,

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

Pour tout $x \in]0;1[,\ x^x(1-x)^{1-x} = \mathrm{e}^{x\ln(x)} \times \mathrm{e}^{(1-x)\ln(1-x)} = \mathrm{e}^{x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)} = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$.

Prouver l'inégalité revient à montrer que pour tout $x \in]0;1[,\ \mathrm{e}^{u(x)} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow u(x) \geqslant -\ln(2)$.

On est ramené à l'étude de la fonction $u(x)$ sur $I =]0;1[$.
u est dérivable sur I cet intervalle et $u'(x) = \ln(x) - \ln(1-x)$, puis $u''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}$.

$u'' > 0$ sur I donc u' est strictement croissante sur I, u' est continue sur I et $0 \in u(I)$, le théorème de la bijection assure l'existence et l'unicité d'une valeur qui annule u' dans I. Or $u'(1/2) = 0$ donc cette valeur est $1/2$. On en déduit que $u' < 0$ sur $]0;1/2]$ et $u' > 0$ sur $[1/2;1[$. Ainsi u est décroissante sur $]0;1/2]$ et croissante sur $[1/2;1[$, elle admet un minimum en $1/2$ qui vaut $u(1/2) = -\ln(2)$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

EXERCICE 2 :

$$\begin{aligned}
4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} &\Leftrightarrow 2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1)\\
&\Leftrightarrow 3 \times 2^{x-1} = 2^2 \times 3^{x-\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{(2x-3)\ln 2} = \mathrm{e}^{\left(x-\frac{3}{2}\right)\ln 3}\\
&\Leftrightarrow (2x-3)\ln 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)\ln 3\\
&\Leftrightarrow x = \frac{3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2 - \ln 3} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est $\dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 3 :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1+\sin(2x)} = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x)} = \sqrt{(\cos(x)+\sin(x))^2} = |\cos(x) + \sin(x)|$.

2. Pour $x \in [0;\pi/2]$, $|\cos(x)+\sin(x)| = \cos(x) + \sin(x)$ et

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sqrt{1+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln(\cos(x)+\sin(x))]_0^{\pi/2} = \ln(1) - \ln(1) = 0.$$

EXERCICE 4 :

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n}$ $\quad ,t \in \mathbb{R}$.

1. $\forall t \in \mathbb{R},\ I_1(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = [\arctan(u)]_0^t = \arctan(t)$.

2. $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n} = \left[\frac{u}{(1+u^2)^n}\right]_0^t + 2n\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^n}\mathrm{d}u = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int_0^t \left(\frac{u^2+1}{(1+u^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+u^2)^{n+1}}\right)\mathrm{d}u$

   On obtient donc $I_n(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^n} + 2n(I_n(t) - I_{n+1}(t)) \Leftrightarrow I_{n+1}(t) = \dfrac{2n-1}{2n}I_n(t) + \dfrac{1}{2n}\dfrac{t}{(1+t^2)^n}$

3. $I_2(t) = \dfrac{1}{2}I_1(t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{1}{2}\arctan(t) + \dfrac{1}{2(t^2+1)}$.

EXERCICE 5 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\mathrm{e}^t}$.

1. G est une primitive de $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t\mathrm{e}^t}$, elle en admet puisque g est continue sur $]0;+\infty[$.
   On a donc $f(x) = [G(t)]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x)$, pour tout $x > 0$.
2. G est dérivable sur $]0;+\infty[$, $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$. Ainsi $f : x \longmapsto G(x^2) - G(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée et différence de fonctions dérivables.
   $\forall x > 0,\ f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \dfrac{2}{x\mathrm{e}^{x^2}} - \dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$.
3. Pour $0 < x < 1,\ t \in [x^2; x]$ (en effet $x^2 < x$), on a $\mathrm{e}^{-1} < \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ ($x < 1 \Leftrightarrow -x > -1$), c'est ainsi que $g(t) \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}t}$, et par conservation de l'ordre :
$$\begin{aligned}\forall x \in]0;1[,\ \int_{x^2}^x g(t)\mathrm{d}t < \int_{x^2}^x \frac{1}{\mathrm{e}t}\mathrm{d}t \text{ et } \int_{x^2}^x \frac{1}{\mathrm{e}t}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}}.\\ \Leftrightarrow -\int_x^{x^2} g(t)\mathrm{d}t > -\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}}\\ \Leftrightarrow -f(x) > -\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}}\\ \Leftrightarrow f(x) < \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$
   Et $\dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, par utilisation du théorème de comparaison, on obtient $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
4. $\forall t > 1,\ \dfrac{1}{t} < 1$. Ainsi, pour $t > 0$, $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ et $g(t) < \mathrm{e}^{-t}$. La conservation de l'ordre par intégration nous permet d'écrire :
$$\text{Pour } x > 1,\ t \in [x; x^2], \int_x^{x^2} g(t)\mathrm{d}t < \int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \text{ et } \int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_x^{x^2} = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x^2}.$$
   Il s'en suit que, pout tout $x > 1$, $0 < f(x) < \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x^2}$. Et $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par utilisation du théorème des gendarmes, on obtient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   ($f(x) > 0$ pour $x > 1$ car $g(t) > 0$ sur $[x; x^2]$ et stricte positivité de l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur $[x; x^2]$)