FONCTIONS USUELLES

I - $\mathbb{R}$ ET INÉGALITÉS

On a les propriétés suivantes, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

- $(a \leqslant b) \Rightarrow \begin{cases} a \times c \leqslant b \times c & \underline{\text{si}}\ 0 \leqslant c \\ b \times c \leqslant a \times c & \underline{\text{si}}\ c \leqslant 0 \end{cases}$
  Autrement dit : on ne change pas le sens d'une inégalité en la multipliant des deux côtés par une quantité positive, mais on la change de sens lorsque le facteur multiplicatif est négatif.
  A retenir : $(a \leqslant b) \Rightarrow (-a \geqslant -b)$.
  Remarque : $\boxed{\text{si } c > 0}$, on a l'équivalence $(a \leqslant b) \Leftrightarrow (a \times c \leqslant b \times c)$.
- $\left.\begin{array}{l} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{array}\right\} \Rightarrow (a + c) \leqslant (b + d)$: on peut additionner membre à membre des inégalités.
- $\left.\begin{array}{l} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \leqslant b \\ -d \leqslant -c \end{array}\right\} \Rightarrow (a-d) \leqslant (b-c)$: PAS DE SOUSTRACTION membre à membre !
- $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant (a \times c) \leqslant (b \times d)$: produit d'inégalités **si** TOUT est POSITIF !
- $(0 < a \leqslant b) \Rightarrow \left(0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}\right)$: la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
- $(a \leqslant b < 0) \Rightarrow \left(\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a} < 0\right)$: la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$.
- ATTENTION : si on ne connait pas les signes de a et b, on ne peut RIEN déduire de $a \leqslant b$.
- $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 < c \leqslant d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 < \dfrac{1}{d} \leqslant \dfrac{1}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{a}{d} \leqslant \dfrac{b}{c}$: PAS DE QUOTIENT membre à membre !
- $(0 \leqslant a \leqslant b) \Rightarrow (0 \leqslant a^n \leqslant b^n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ ($x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0, +\infty[$).
- **si** $0 \leqslant a$ **et** $0 \leqslant b$ **alors** on a l'équivalence : $(a \leqslant b) \Leftrightarrow (a^2 \leqslant b^2)$.
  La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$ mais décroissante sur $]-\infty, 0]$.
- pour tous a et b réels, on a l'équivalence : $(a \leqslant b) \Leftrightarrow (a^3 \leqslant b^3)$.

II - LA VALEUR ABSOLUE

Définition : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est :

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{si } 0 \leqslant x \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Définition : pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, la **distance** entre a et b est :

$$\mathrm{d}(a, b) = |a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } b \leqslant a \\ b - a & \text{si } a \leqslant b \end{cases}$$

Remarque : $\mathrm{d}(a, b) = \mathrm{d}(b, a)$ est un réel positif.

Conséquence : $|x| = \mathrm{d}(0, x) =$ la distance entre 0 et x.

Propriétés : pour tout $x \in \mathbb{R}$

- $0 \leqslant |x|$ (i.e) $|x| \in \mathbb{R}^+$.
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
- $\boxed{-K \leqslant x \leqslant K \Leftrightarrow |x| \leqslant K \Leftrightarrow x \in [-K, +K]}$. D'où $\boxed{(|x-a| \leqslant h) \Leftrightarrow (a-h \leqslant x \leqslant a+h)}$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|x^n| = |x|^n$. Un cas particulier : $|x^2| = |x|^2 = x^2$ (avec x réel, $x^2 \in [0, +\infty[$).
- $|-x| = |x|$.
- si $x \neq 0$: $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$.
- $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$. Mais on a : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ (car ici x est nécessairement positif à cause de $\sqrt{x}$).

Propriétés : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

- $|x \times y| = |x| \times |y|$ et si $x \neq 0$: $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$
- $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ **(inégalité triangulaire)**
- $|x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$ **(double inégalité triangulaire)**
- $\boxed{\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|}$ **(généralisation)**
- $(\ |x+y| = |x| + |y|\ ) \Leftrightarrow (\ 0 \leqslant xy$ (i.e) x et y ont le même signe $)$ **(cas d'égalité)**

Remarque : l'inégalité triangulaire se généralise.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n, on prouve facilement :
si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n réels (avec n entier, $n \geqslant 2$) **alors** $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.
Autrement dit : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Remarque : pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, en écrivant $a - c = (a-b) + (b-c)$ on obtient

$$\boxed{|a-c| \leqslant |a-b| + |b-c|} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{d}(a,c) \leqslant \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d}(b,c).$$

Proposition : si $x, y \in \mathbb{R}$ alors

$$\boxed{\max(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x-y|\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\min(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y - |x-y|\right)}.$$

Parties majorées-minorées-bornées : soit A, une partie de $\mathbb{R}$

- On dit que le réel M est **un majorant** de A si, pour tout réel $x \in A$, on a : $x \leqslant M$.
- On dit que le réel m est **un minorant** de A si, pour tout réel $x \in A$, on a : $m \leqslant x$.
- On dit que la partie A est **majorée** si elle possède un majorant. Ainsi :
  $$(A \text{ est majorée}) \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \leqslant M).$$
- On dit que la partie A est **minorée** si elle possède un minorant. Ainsi :
  $$(A \text{ est minorée}) \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ m \leqslant x).$$
- On dit que la partie A est **bornée** si il existe un réel K tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant K$.
- Proposition : (A est bornée) $\Leftrightarrow$ (A est majorée et minorée).

III - PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$

Parité, imparité, périodicité

On travaille dans le repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, dans lequel est tracé le graphe $\mathcal{C}_f$ de f.
Rappel : $\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

- $f : D \to \mathbb{R}$ est **paire** si D est symétrique par rapport à 0 (i.e si $x \in D \Rightarrow -x \in D$) et si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$. Dans ce cas, $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des ordonnées (Oy) comme **axe de symétrie**.
- $f : D \to \mathbb{R}$ est **impaire** si D est symétrique par rapport à 0 (i.e si $x \in D \Rightarrow -x \in D$) et si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$. Dans ce cas, $\mathcal{C}_f$ admet le point O comme **centre de symétrie**.
  Intéret : si f est paire ou impaire, on l'étudie uniquement sur les positifs (sur $D \cap \mathbb{R}^+$), et on déduit l'étude globale par symétrie (axiale ou centrale selon la parité).
- Plus généralement : soit a et b des réels et un ensemble D tel que $(x \in D) \Rightarrow (2a - x \in D)$.
  Remarque : x et $2a - x$ sont symétriques par rapport au point a.

♡ Si $\boxed{\forall x \in D,\ f(x) = f(2a - x)}$ alors la droite verticale $\boxed{\text{«}x = a\text{» est } \textbf{axe de symétrie}}$ pour $\mathcal{C}_f$.
Autre présentation : pour tout h (sous réserve d'existence), $\boxed{f(a - h) = f(a + h)}$.

♡ Si $\boxed{\forall x \in D,\ f(x) + f(2a - x) = 2b}$ alors le point $\boxed{\Omega\,(a, b) \text{ est un } \textbf{centre de symétrie}}$ pour $\mathcal{C}_f$.
Autre présentation : pour tout h (sous réserve d'existence), $\boxed{\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2} = b}$.

- Soit un réel $T > 0$: on dit que f est T-**périodique** si D est stable par translation de vecteur $T\vec{e}_1$ (i.e si $x \in D \Rightarrow x + T \in D$) et si pour tout $x \in D$, $f(x + T) = f(x)$. Dans ce cas, $\mathcal{C}_f$ est stable par la translation de vecteur horizontal $T\vec{e}_1$. Il suffit donc d'étudier et de tracer f sur un intervalle de longueur T (de la forme $[x_0, x_0 + T]$: par exemple $[0, T]$, ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, ou $[\frac{T}{3}, \frac{4T}{3}]$) puis d'en déduire le reste par translation.
  Remarque : si f est T-périodique, alors on a ,
  $$\text{pour tout } x \in D \text{ et tout entier } n \in \mathbb{Z},\ f(x + nT) = f(x) \quad (\text{si } x + nT \in D).$$

Composition, monotonie, bijection

- Si $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : \Delta \to \mathbb{R}$ et $\forall x \in D, f(x) \in \Delta$, ce que l'on note $f(D) \subset \Delta$, alors on peut définir la **fonction composée** $h = g \circ f$ sur D par : $\forall x \in D$, $h(x) = g \circ f(x) = g\,(f(x))$.
- On dit que f est **croissante** sur D si, pour tous $a, b \in D$:
  $(a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ (**strictement croissante** si $(a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$.
  On dit que f est **décroissante** sur D si, pour tous $a, b \in D$:
  $(a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$ (**strictement décroissante** si $(a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$.
  Remarque : si f est monotone (croissante ou décroissante) sur D et g monotone sur $f(D)$, alors $g \circ f$ est monotone sur D. Par exemple : f et g de même monotonie entraîne $g \circ f$ croissante.
  Remarque : une somme de fonctions croissantes est croissante. ATTENTION : c'est faux en général pour un produit ou un quotient.
- Une fonction $f : I \to J$ est une **bijection** de I vers J si tout élément y_0 de J possède, dans I, un et un seul antécédent x_0 par f, autrement dit si, pour tout $y_0 \in J$, l'équation $f(x) = y_0$

possède une et une seule solution $x = x_0$ dans l'ensemble I.
Dans ce cas, on peut construire l'application réciproque de f, notée $f^{-1} : J \to I$ définie par, pour tout $y_0 \in J$, $f^{-1}(y_0) = x_0$.
Propriétés :

♡ $\forall x \in I, \forall y \in J$:
$$f^{-1} \circ f(x) = x \text{ et } f \circ f^{-1}(y) = y \quad \text{i.e} \quad f^{-1}(f(x)) = x \text{ et } f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$
(d'où les égalités d'applications $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$).

♡ Le graphe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1} est le symétrique orthogonal de celui de f par rapport à la première bissectrice d'équation «$y = x$» (image par la réflexion d'axe «$y = x$»).
En effet, si $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{C}_f$, alors $b = f(a)$ donc $a = f^{-1}(b)$: par conséquent, le point $M'\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Les points $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

- Théorème de la bijection : si I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$, si f est **continue** et **strictement monotone** sur I, alors f réalise une **bijection** de I vers $f(I)$. Dans ce cas, la réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est également continue et de même monotonie que f.

Fonctions majorées, minorées, bornées

- $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **majorée** (sur D) s'il existe une constante réelle M telle que, pour tout $x \in D$, on a $f(x) \leqslant M$: $\boxed{(f \text{ majorée sur } D) \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ f(x) \leqslant M)}$.
- $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **minorée** (sur D) s'il existe une constante réelle m telle que, pour tout $x \in D$, on a $f(x) \geqslant m$: $\boxed{(f \text{ minorée sur } D) \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ m \leqslant f(x))}$.
- $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **bornée** (sur D) si sa valeur absolue $|f|$ est majorée, autrement dit s'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x \in D$, on a $|f(x)| \leqslant K$:
$$\boxed{(f \text{ bornée sur } D) \Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall x \in D,\ |f(x)| \leqslant K)}.$$
Propriété : on a l'équivalence (f est bornée sur D) $\Leftrightarrow$ (f est minorée et majorée sur D).
- S'il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, $f(x) \leqslant f(x_0)$, on dit que $M_0 = f(x_0)$ est **le maximum** de f sur D (atteint en x_0).
On note : $M_0 = f(x_0) = \max\limits_D(f) = \max\limits_{x \in D}(f(x)) = \max\{f(x) \mid x \in D\} = \max(f(D))$.
De même, S'il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, $f(x) \geqslant f(x_0)$, on dit que $m_0 = f(x_0)$ est **le minimum** de f sur D (atteint en x_0).
On note : $m_0 = f(x_0) = \min\limits_D(f) = \min\limits_{x \in D}(f(x)) = \min\{f(x) \mid x \in D\} = \min(f(D))$.

IV - FONCTIONS et DÉRIVATION

Dérivation et tangente

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$: si la limite $\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$ existe ET est finie, on la note $f'(a)$ (nombre dérivé de f en a).

Remarque : on a également $\boxed{f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)}$.

Si ceci est vérifié pour tout point a de D, on construit la fonction dérivée

$$f' : \left| \begin{array}{lcl} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) \end{array} \right. .$$

Autre notation : $f'=f^{(1)}=Df=\dfrac{df}{dx}$.

Si f' est elle-même dérivable, on note $f''=(f')'=f^{(2)}=\dfrac{d^2f}{dx^2}$. De même, on définit les dérivées successives $f^{(n)}=\dfrac{d^nf}{dx^n}$ où, par convention, $f^{(0)}=f$ et $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$.

- Intérêts :

  ♡ Soit f, une fonction dérivable en a : notons M_0 et M les points de coordonnées respectives $(a,f(a))$ et $(x,f(x))$, points situés sur $\mathcal{C}_f$, graphe de f dans un repère orthonormé. Alors $T_a(x):=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ représente **la pente de la sécante** (M_0M) : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}T_a(x)$ est donc la pente de la «sécante limite» lorsque $M\to M_0$, autrement dit la **pente de la tangente** à $\mathcal{C}_f$ en M_0.
  A retenir : $\boxed{\text{« } Y=f'(a)(X-a)+f(a) \text{ »}}$ est une **équation de la tangente** $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ au point $M_0(a,f(a))$.

  ♡ Le signe de f' sur un intervalle permet d'obtenir les variations de f. Plus précisément :
  – si $f'\geqslant 0$ sur un **INTERVALLE** I alors f est croissante sur I.
  – si $f'>0$ sur un intervalle I alors f est strictement croissante sur I.
  – si $f'>0$ sur un intervalle I sauf en un nombre fini de points x_0 où $f'(x_0)=0$, alors f est strictement croissante sur I.
  – résultats similaires avec $f'\leqslant 0$, $f'<0$ et la décroissance de f sur l'INTERVALLE I.

Propriétés de la dérivation

- Si f et g sont dérivables sur D et α, β des CONSTANTES, alors :
  $\boxed{(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'}$ (linéarité de la dérivation) ET $\boxed{(f\times g)'=f'\times g+f\times g'}$.
  Si g ne s'annule pas sur D :
  $\boxed{\left(\dfrac{1}{g}\right)'=-\dfrac{g'}{g^2}}$ ET $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}}$
- Si f est dérivable sur I, si g est dérivable sur l'ensemble image $f(I)$, alors la composée $g\circ f$ est dérivale sur I avec $\boxed{(g\circ f)'=f'\times(g'\circ f)}$. Autrement dit, $\boxed{(g(f))'=f'\times g'(f)}$.
- Exemples : si u est une fonction dérivable, sous réserve d'existence : $\boxed{(f(u))'=u'f'(u)}$.
  Conséquences :
  $\boxed{(\sin(u))'=u'\cos(u)}$, $\boxed{(\cos(u))'=-u'\sin(u)}$, $\boxed{(\tan(u))'=u'(1+\tan^2(u))=\dfrac{u'}{\cos^2(u)}}$,
  $\boxed{(u^\alpha)=\alpha u'u^{\alpha-1}}$ où α=**constante**, $\boxed{(\ln(|u|))'=\dfrac{u'}{u}}$, $\boxed{(\exp(u))'=u'\exp(u)}$.

Dérivation de la réciproque d'une bijection

Proposition : si f est une bijection de I vers J, si f est dérivable en $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable au point $b = f(a) \in J$ avec $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Exemple pratique

Si f est dérivable avec $f' > 0$ sur sur l'intervalle I, alors f établit une bijection de I vers $f(I) = J$. Sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J avec, pour tout $t \in J$: $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(t) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(t)\right)}}$ (idem si $f' < 0$).

V - FONCTIONS USUELLES

Logarithme, exponentielle, puissance

Voir polycopié manuscrit. Quelques résultats en vrac :

- Logarithme néperien : pour $x > 0$, $\boxed{\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t}$.

  ♡ $D_{\ln} =]0, +\infty[$, $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

  ♡ Si $a > 0$, $b > 0$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

  ♡ Si $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$: $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

  ♡ $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = 0}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1}$.

  Conséquences : avec une constante $\alpha > 0$,

  $$\boxed{\frac{\ln(x)}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0} \quad \text{et} \quad \boxed{x^\alpha \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \underset{x \to +0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha < 1 \end{cases}}.$$

  ♡ $\dfrac{d(\ln(x))}{dx} = \dfrac{1}{x}$. Si u est dérivable : $\boxed{(\ln(|u|))' = \dfrac{u'}{u}}$.

  ♡ Inégalité à retenir : pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\boxed{\ln(1+x) \leqslant x}$ (i.e si $t > 0$, $\boxed{\ln(t) \leqslant t - 1}$).

- Exponentielle

  ♡ Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, +\infty[$, alors : $(y = \exp(x)) \Leftrightarrow (x = \ln(y))$.

  ♡ $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

  ♡ Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$: $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, $\dfrac{1}{\exp(b)} = \exp(-b)$, $\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b)$,

  ♡ Si $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$: $(\exp(x))^\alpha = \exp(\alpha x)$. Notation : $\exp(x) = e^x$.

  ♡ $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x) = 0}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) = 1}$.

  Conséquences : avec une constante $\alpha > 0$,

$$\boxed{\frac{e^x}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{|x|^\alpha e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{e^x-1}{x^\alpha} \underset{x\to+0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha>1 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha=1 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha<1 \end{cases}}.$$

♡ Inégalité à retenir : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^x \geqslant 1+x}$.

♡ $\dfrac{d\left(e^x\right)}{dx} = e^x$. Si u est dérivable : $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(\exp)^{(n)} = \exp$.

♡ Si $A>0$ et $B \in \mathbb{R}$, la définition de A^B est : $\boxed{A^B = e^{B\ln(A)}}$.

Conséquence : si u et v sont des fonctions dérivables, alors, sous réserve d'existence, la dérivée de la fonction u^v est $\boxed{(u^v)' = \left(e^{v\ln(u)}\right)' = \left(v'\ln(u) + v\dfrac{u'}{u}\right)u^v}$.

- Logarithme décimal : si $x>0$, on définit $y = \log_{10}(x)$ (ou tout simplement $\log(x)$) par $x = 10^y$.
  Autrement dit : $\ln(x) = y\ln(10)$ donc $y = \log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
  Ainsi : $\boxed{(x=10^y) \Leftrightarrow \left(y = \log_{10}(x) = \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)}$.
- Puissances

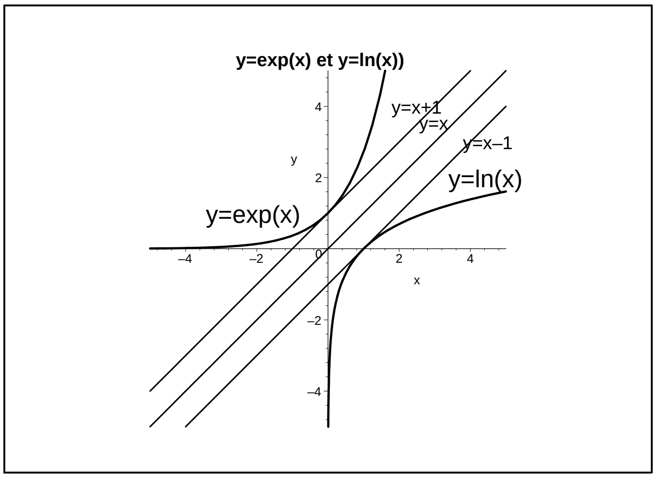
♡ Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit, sur $]0,+\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$.

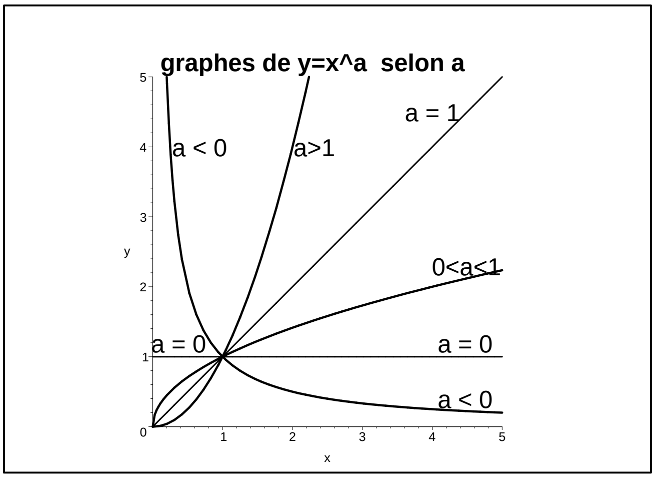
Elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\left(x^\alpha\right)}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}}$.

Puis, par composition, avec u fonction dérivable à valeurs dans $]0,+\infty[$ et α **constante** : $\boxed{(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}}$.

♡ Si $x, y \in]0,+\infty[$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $\quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $\quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

- Graphes





Fonctions hyperboliques : cosinus et sinus hyperboliques

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}} \text{ (fonction paire)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}} \text{ (fonction impaire)}$$

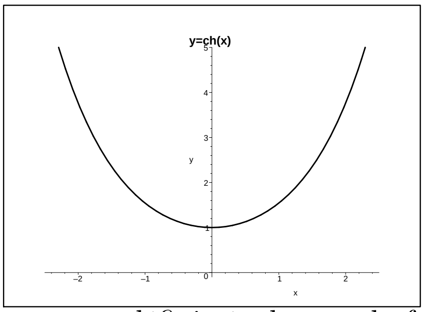
- On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x}$ et $\boxed{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}}$ puis $\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1}$.
  Conséquence : puisque, pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x)$ est positif et $\mathrm{sh}(x)$ a le signe de x, on en déduit les formules avec $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

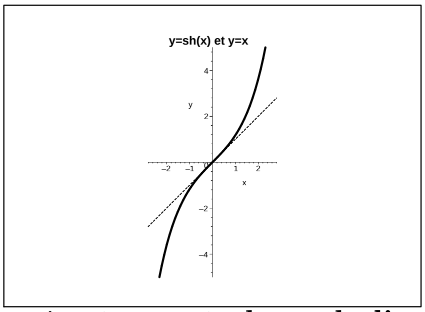
$$\text{pour tout réel } x, \ \boxed{\mathrm{ch}(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{sh}(x) = \mathrm{sgn}(x)\sqrt{\mathrm{ch}^2(x) - 1}}.$$

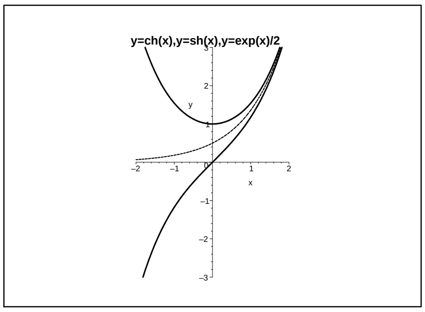
- $\boxed{\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}}$ et $\boxed{\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}}$ d'où, si u est une fonction dérivable :

$$\boxed{(\mathrm{ch}(u))' = u'\mathrm{sh}(u)} \text{ et } \boxed{(\mathrm{sh}(u))' = u'\mathrm{ch}(u)}.$$

  Ces fonctions sont leur propre dérivée seconde : $\mathrm{ch}'' = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{sh}'' = \mathrm{sh}$.
  Mieux, si ω est une **constante**, alors les fonctions $[x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x)]$ et $[x \mapsto \mathrm{sh}(\omega x)]$ sont des solutions de l'équation différentielle (linéaire, homogène, du second ordre) : $y'' - \omega^2 y = 0$.
- Limites usuelles : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} \right) = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} \right) = \dfrac{1}{2}}$.
- <u>Graphes</u>



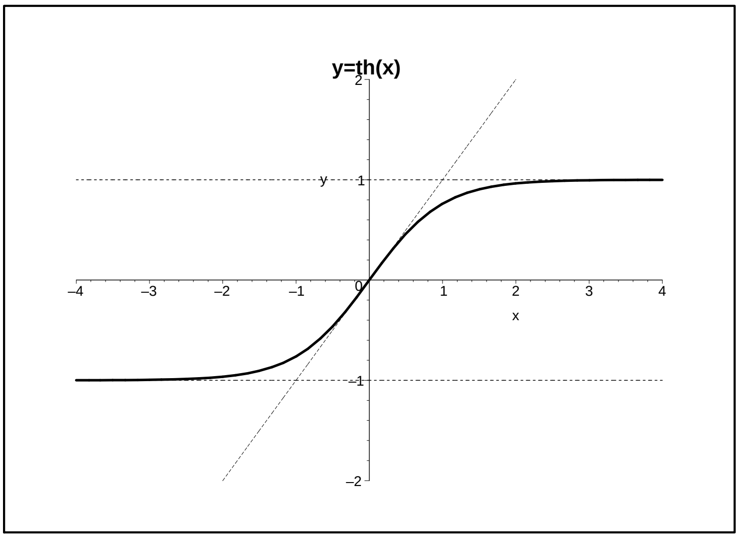




<u>Complément</u> : on définit également la fonction **tangente hyperbolique** par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \ \boxed{\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}}.$$

C'est une fonction impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\boxed{\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (\mathrm{th}(x)) = \pm 1$. Graphe :



Fonctions trigonométriques réciproques : Arcsinus, Arccos, Arctangente

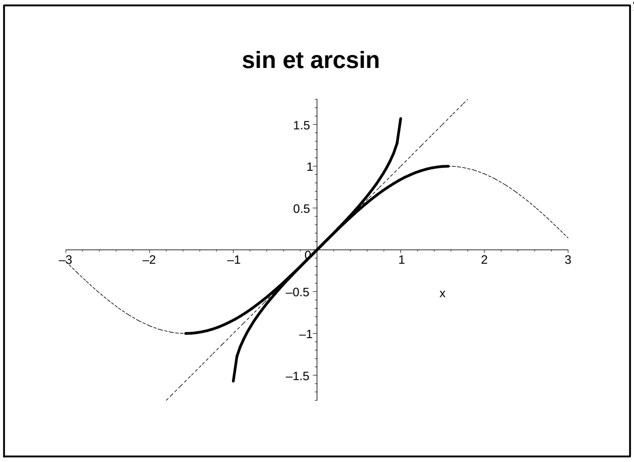
- Quelques rappels

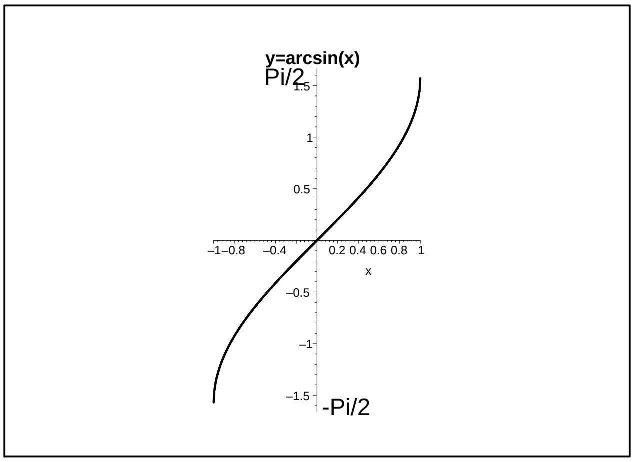
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)=1},\quad \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}},\quad \boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin x|\leqslant |x|}.$$

Si u est une fonction dérivable :

$$\boxed{(\sin(u))'=u'\cos(u)},\quad \boxed{(\cos(u))'=-u'\sin(u)},\quad \boxed{(\tan(u))'=\frac{u'}{\cos^2(u)}=u'\left(1+\tan^2(u)\right)}.$$

- $\boxed{\text{Arcsin}}$: la fonction $f:\left|\begin{array}{ccc}[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,+1]\\ x & \longmapsto & f(x)=\sin(x)\end{array}\right.$ est une bijection, dont la réciproque f^{-1} est notée Arcsin : $\left|\begin{array}{ccc}[-1,+1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]\\ x & \longmapsto & f^{-1}(x)=\text{Arcsin}(x)\end{array}\right.$, fonction croissante et impaire.





♡ Pour tous $x\in[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$, $y\in[-1,+1]$, on a l'équivalence : $(y=\sin(x))\Leftrightarrow(x=\text{Arcsin}(y))$.

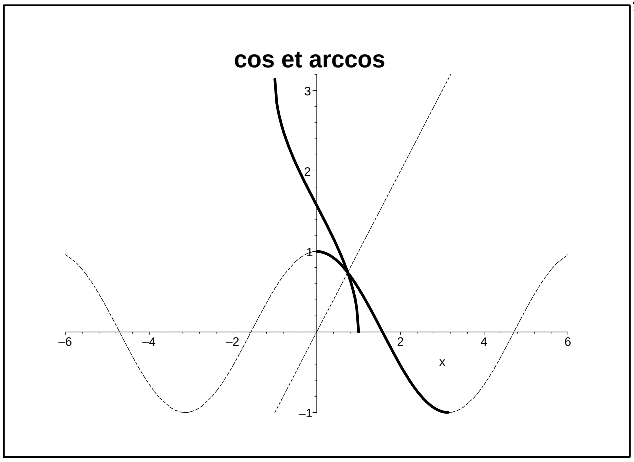
♡ Attention : $\boxed{(\text{Arcsin}(\sin(x))=x)\Leftrightarrow(x\in[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}])}$ et $\boxed{(\sin(\text{Arcsin}(x))=x)\Leftrightarrow(x\in[-1,+1])}$

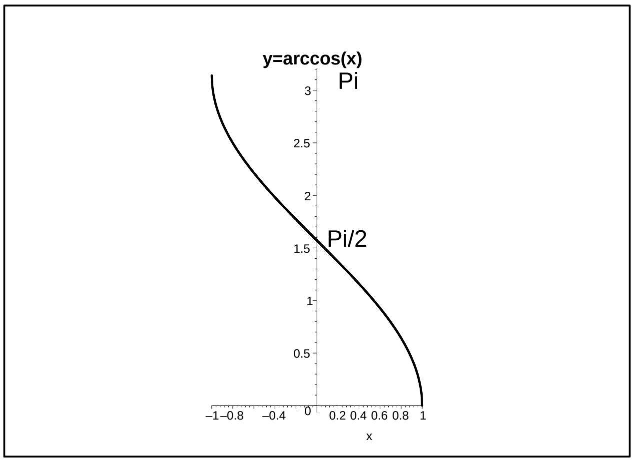
♡ La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,+1[$ avec :

$$\forall x\in]-1,+1[,\ \boxed{\text{Arcsin}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Ainsi, si u est une fonction dérivable, à valeurs dans $]-1,+1[$: $\boxed{(\text{Arcsin}(u))'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$.

- $\boxed{\text{Arccos}}$: la fonction $f:\left|\begin{array}{ccc}[0,\pi] & \longrightarrow & [-1,+1]\\ x & \longmapsto & f(x)=\cos(x)\end{array}\right.$ est une bijection, dont la réciproque f^{-1} est notée Arccos : $\left|\begin{array}{ccc}[-1,+1] & \longrightarrow & [0,\pi]\\ x & \longmapsto & f^{-1}(x)=\text{Arccos}(x)\end{array}\right.$, fonction décroissante MAIS non paire.



,


♡ Pour tous $x \in [0, \pi]$, $y \in [-1, +1]$, on a l'équivalence : $(y = \cos(x)) \Leftrightarrow (x = \mathrm{Arccos}(y))$.

♡ Attention : $\boxed{(\mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x) \Leftrightarrow (x \in [0, \pi])}$ et $\boxed{(\cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x) \Leftrightarrow (x \in [-1, +1])}$

♡ La fonction Arccos est dérivable sur $]-1, +1[$ avec :

$$\forall x \in]-1, +1[, \ \boxed{\mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Ainsi, si u est une fonction dérivable, à valeurs dans $]-1, +1[$: $\boxed{(\mathrm{Arccos}(u))' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}}$.

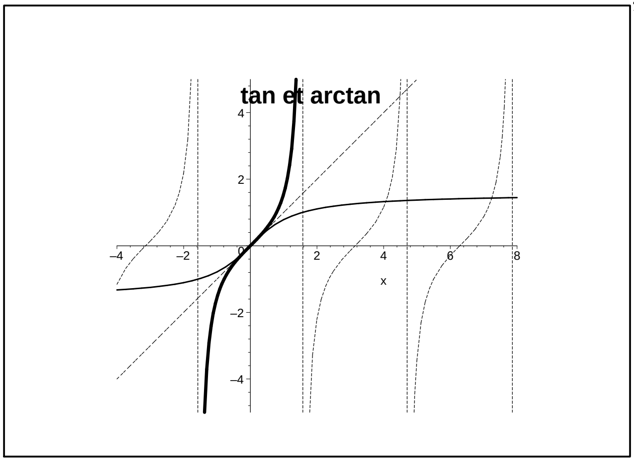
♡ Remarque : pour tout $x \in [-1, +1]$,

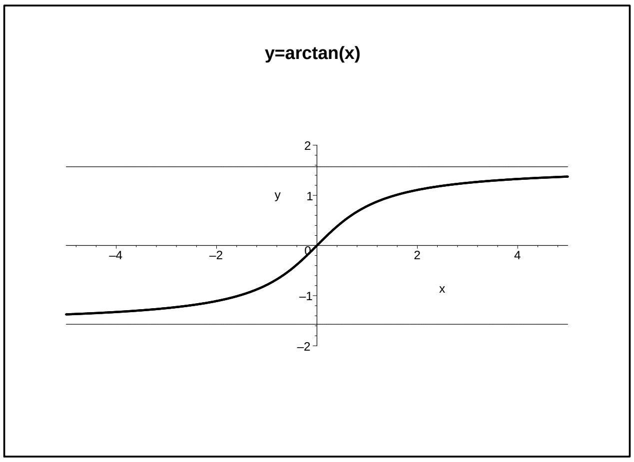
$$\boxed{\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}} \text{ et } \boxed{\sin(\mathrm{Arccos}\ x) = \cos(\mathrm{Arcsin}\ x) = \sqrt{1-x^2}}.$$

Conséquence : $\mathrm{Arccos}\,(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}\,(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} - x$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

- $\boxed{\mathrm{Arctan}}$: la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \tan(x) \end{array} \right.$ est une bijection, dont la réciproque

f^{-1} est notée Arctan : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \mathrm{Arctan}(x) \end{array} \right.$, fonction croissante et impaire.



,


♡ Pour tous $x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, $y \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : $(y = \tan(x)) \Leftrightarrow (x = \mathrm{Arctan}(y))$.

♡ Attention : $\boxed{(\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x) \Leftrightarrow (x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[)}$ et $\boxed{(\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R})}$

♡ La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}.$$

Ainsi, si u est une fonction dérivable, à valeurs dans $\mathbb{R}$: $\boxed{(\mathrm{Arctan}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}}$.

♡ Remarque : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2} \quad \text{où } \mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}}.$$

Compléments : calcul de l'argument d'un complexe non nul avec la fonction Arctan

Soit $z = x + iy \neq 0$, un complexe non nul, et θ **un** argument de z.
On pose $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $(r > 0)$.
On a $z = x + iy = re^{i\theta} = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ d'où

$$x = r\cos(\theta) \text{ et } y = r\sin(\theta) \text{ d'où } \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \text{ et } \boxed{\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x}} \text{ si } x \neq 0.$$

- Si $x = \mathrm{Re}(z) = 0$: alors z est un imaginaire pur, et $\theta = \mathrm{sgn}(y)\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
- Si $x = \mathrm{Re}(z) > 0$: alors on peut choisir un argument dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, et $\theta = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)[2\pi]$.
- Si $x = \mathrm{Re}(z) < 0$: alors on peut choisir un argument dans $]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}[$, et $\theta = \pi + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)[2\pi]$.
  On rappelle que la fonction tangente est π-périodique : en particulier, $\tan(\theta) = \tan(\theta - \pi)$.

Remarque : il existe, selon les cas, d'autres représentations possibles. Si $z = x + iy$ est non nul (où x et y réels), en posant $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, on peut récupérer un argument θ de z avec

$$\boxed{\theta = \begin{cases} \mathrm{Arccos}\left(\frac{x}{r}\right) & \text{si } y \geqslant 0 \\ -\mathrm{Arccos}\left(\frac{x}{r}\right) & \text{si } y < 0 \end{cases}} \quad \boxed{\theta = \begin{cases} \mathrm{Arcsin}\left(\frac{y}{r}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \pi - \mathrm{Arcsin}\left(\frac{y}{r}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}} \quad \boxed{\theta = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Fonctions à valeurs complexes

- On considère ici des fonctions f définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ (i.e $D \subset \mathbb{R}$), mais à valeurs complexes (i.e à valeurs dans $\mathbb{C}$). Autrement dit :
  $f : \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) = x(t) + iy(t) \end{array} \right.$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont les parties réelles et imaginaires de $f(t)$.
  La fonction $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable si les fonctions $x : D \to \mathbb{R}$ et $y : D \to \mathbb{R}$ le sont, et on a : $f'(t) = x'(t) + iy'(t)$ i.e $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}(x+iy)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + i\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$.
  Propriétés : Si f et g sont des fonctions dérivables à valeurs complexes, et α, β des CONSTANTES dans $\mathbb{C}$, alors on a :

  $$\boxed{(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'} \text{ ET } \boxed{(f \times g)' = f' \times g + f \times g'} \text{ ET } \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}.$$

  Remarque : de même, on a, pour a et b réels, sous réserve d'existence :

  $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (x(t) + iy(t))\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b y(t)\mathrm{d}t.$$

- Proposition : soit $\varphi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction à valeurs complexes et dérivable.

  Alors la fonction composée $\exp \circ\varphi : \left| \begin{array}{ccccc} D \subset \mathbb{R} & \underset{\varphi}{\longrightarrow} & \mathbb{C} & \underset{\exp}{\longrightarrow} & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \varphi(t) & \longmapsto & \exp\circ\varphi(t) = \exp(\varphi(t)) = e^{\varphi(t)} \end{array} \right.$

  est dérivable, et on a :

  $$\boxed{(e^{\varphi})' = \varphi' \times e^{\varphi}}.$$

  Exemple : si $a \in \mathbb{C}$, $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\left(e^{at}\right)}{\mathrm{d}t} = a.e^{at}}$. D'où les primitives de $t \mapsto e^{at}$: $\boxed{\displaystyle\int e^{at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}.e^{at} + \text{constante}}$.

  Un cas particulier : $\dfrac{\mathrm{d}\left(e^{it}\right)}{\mathrm{d}t} = i.e^{it}$, autrement dit

  $$\frac{\mathrm{d}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right)}{\mathrm{d}t} = i.\left(\cos(t) + i\sin(t)\right) = -\sin(t) + i\cos(t).$$

  On retrouve : $\dfrac{\mathrm{d}\left(\cos(t)\right)}{\mathrm{d}t} = -\sin(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\left(\sin(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \cos(t)$.

  Ou, vu autrement :

  $$\frac{\mathrm{d}\left(\cos(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{ie^{it} - ie^{-it}}{2} = i\frac{e^{it} - e^{-it}}{2} = -\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = -\sin(t).$$

  Autre exemple : soit $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) = t^{\alpha} := e^{\alpha\ln(t)} = t^{a}.e^{ib\ln(t)} \end{array} \right.$ où $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$.

  Un calcul de dérivées par composition permet d'établir : $\dfrac{\mathrm{d}\left(t^{\alpha}\right)}{\mathrm{d}t} = \alpha.t^{\alpha-1}$.

  Autre exemple : soit z, un **complexe non réel** i.e $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

  La fonction $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x - z} \end{array} \right.$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

  On peut montrer qu'elle est est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-z)^2}$.

  Esquisse de la preuve : on écrit

  $$f(x) = \frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-(a+ib)} = \frac{1}{(x-a)-ib} = \frac{(x-a)+ib}{(x-a)^2+b^2} = \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} + i\frac{b}{(x-a)^2+b^2}.$$

  On dérive par rapport à la variable x :

  $$f'(x) = \frac{(x-a)^2+b^2-2(x-a)^2}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^2} - i\frac{2b(x-a)}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^2} = \frac{-(x-a)^2+b^2-2ib(x-a)}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^2}$$

  $$f'(x) = -\frac{\left[(x-a)+ib\right]^2}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^2} = -\frac{1}{\left[(x-a)-ib\right]^2} - = \frac{1}{(x-z)^2}$$