EXERCICE 1 :

1. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Prouver que $\forall u \in E$, $0.u = 0_E$.
2. Prouver que si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in F$.
3. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer une famille génératrice de F. Est-ce une base de F ?

EXERCICE 2 :

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c) \cos x$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

EXERCICE 3 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ une famille de vecteurs de E. Prouver que :

1. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \text{vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est libre.
2. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} \in \text{vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice.

EXERCICE 4 :

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0\}$.

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de F. Quelle est la dimension de F ?

EXERCICE 5 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (2, 1, 0, 3), u_2 = (3, -1, 5, 2), u_3 = (-1, 0, 2, 1) \text{ et } F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3).$$

1. Déterminer une base de F.
2. Soit $v = (2, 3, -7, 3)$. v est-il un vecteur de F ?

EXERCICE 6 :

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - 3y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 1)$ et $v = (2, 1, -1)$.

1. Montrer que $G \subset F$.
2. En déduire que $F = G$.

EXERCICE 7 :

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et P_1, P_2, P_3 les polynômes définies par $P_1 = X + 1$, $P_2 = X - 1$ et $P_3 = X^2 - 1$.

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de E.
2. Donner les coordonnées dans cette base de $P \in E$ définie par $P = X^2 - 5X + 4$.
3. Soit $F = \{P \in E \ : \ P(1) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.