EXERCICE 1 :

1.
2.
3. Démarche comparable à la question 3 de l'exercice 1 Colle 18 : `http://www.mimaths.net/spip.php?rubrique166`
4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x+z, z) \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)$

   Tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ donc $F = \text{vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$. Ainsi $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ est une famille génératrice.

   $\mathcal{B}$ est-elle libre ?
   $x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x, x+z, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = 0$ et $z = 0$ ainsi $\mathcal{B}$ est libre.

   $\mathcal{B}$ est génératrice et libre donc c'est une base de F. F est donc de dimension 2.

EXERCICE 2 :

1. On pose $f_0(x) = \cos x$, $f_1(x) = x \cos x$ et $f_2(x) = x^2 \cos x$, $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ est une famille génératrice de E et $E = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$. E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, (\alpha + \beta x + \gamma x^2) \cos x = 0$, en particulier pour $x = 2n\pi$, on a $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma = 0$ ($\bigstar$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ si $\gamma \neq 0$ ce qui contredit la relation ($\bigstar$) donc nécessairement $\gamma = 0$.
   Ce qui implique que $\alpha + 2n\pi\beta = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Successivement $n = 0$ et $n = 1$ impliquent $\alpha = \beta = 0$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre et représente donc une base de E, qui est donc de dimension 3.

EXERCICE 3 :

E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ une famille de vecteurs de E. Prouver que :

1. Supposons que $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$. Soit (λ_i) une famille de réels tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} = 0$ ($\bigstar$). Si l'on fait l'hypothèse que $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors $u_{n+1} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} u_i$, ce qui signifie que $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$. Or ceci est contriare à l'hypothèse donc $\lambda_{n+1} = 0$ et donc ($\bigstar$) devient $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ qui implique à son tour que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ car $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
   Finalement ($\bigstar$) $\Rightarrow \lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ et$(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est libre.

2. Soit $x \in E$ alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i$ (1) car $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice ; or $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ donc $u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ (2). En « mixant » les deux relations (1) et (2), on obtient $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_{n+1}\alpha_i) u_i$ donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice.

EXERCICE 4 :

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0\}$.

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
   - $(0, 0, 0) \in F$ donc F est non vide.
   - Soit $u = (x, y, z) \in F$, $v = (x', y', z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $u \in F$ implique $x = 0$ et $v \in F$ implique $x' = 0$. $u + v = (x + x', y + y', z + z') = (0, y + y', z + z')$ donc $u + v \in F$.

- $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $u \in F \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \lambda u = (0, \lambda y, \lambda z)$ donc $\lambda u \in F$.

Compte-tenu de ce qui précéde, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Famille génératrice de F : $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, y, z)$ et $(0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ donc $F = \text{Vect}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$. La famille $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est donc génératrice et libre (vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de F qui est donc de dimension 2.

EXERCICE 5 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (2, 1, 0, 3), u_2 = (3, -1, 5, 2), u_3 = (-1, 0, 2, 1) \text{ et } F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3).$$

1. F est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs u_1, u_2 et u_3). $\dim(F) \leqslant 3$ car (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de F. On vérifie que (u_1, u_2, u_3) est libre :
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au_1 + bu_2 + cu_3 = (0, 0, 0)$ $(\bigstar)$

$$(\bigstar) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ a - b = 0 \\ 5b + 2c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b - c = 0 \ (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ a - b = 0 \\ 5b + 2c = 0 \\ 5b + c = 0 \ (L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10b = 0 \\ (L_1 \leftarrow L_1 + L_4) \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

(u_1, u_2, u_3) est libre, puisque génératrice, elle forme une base et $\dim F = 3$.

2. $v = (2, 3, -7, 3)$ est un vecteur de F si et seulement si il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ (unique) tel que $v = au_1 + bu_2 + cu_3$ $(\bigstar)$.

En résolvant le système, on parvient à $(a, b, c) = (2, -1, -1)$. Ainsi $v \in F$.

EXERCICE 6 :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - 3y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 1)$ et $v = (2, 1, -1)$.

1. Les coordonnées de u vérifient l'équation de F donc $u \in F$. De même $v \in F$. F étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (à démontrer voir ex 1), $au + bv$ $((a, b) \in \mathbb{R}^2)$ est donc un élément de F, or tout élément de G est une combinaison linéaire de u et de v, impliquant que $G \subset F$.
2. C'est une « affaire » de dimension. Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est libre ; elle est génératrice car $G = \text{Vect}(u, v)$ donc (u, v) base de G et $\dim G = 2$.

   D'autre part, $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow z = 2x - 3y$.
   Ainsi tout élément de F est de la forme $(x, y, 2x - 3y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, -3)$, ce qui permet d'écrire que $F = \text{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, -3))$. La famille $((1, 0, 2), (0, 1, -3))$ est une base de F (génératrice et de façon évidente libre) donc $\dim F = 2$.

   Ainsi $\begin{cases} \dim F = \dim G = 2 \\ G \subset F \end{cases} \Longrightarrow G = F.$

EXERCICE 7 :

1. $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg P \leqslant 2\} = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

   $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et une base de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$ (dite « base canonique » de $\mathbb{R}_2[X]$)

   $P_1, P_2, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ donc puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel, $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

On peut remarquer que :
$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}(P_1 - P_2) \\ X = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \\ X^2 = P_3 \frac{1}{2}(P_1 - P_2) \end{cases}$$
ce qui prouve que $\mathbb{R}_2[X] \subset \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ et donc grâce à la double inclusion, $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$; (P_1, P_2, P_3) est donc une famille génératrice de 3 éléments et $\dim\mathbb{R}_2[X] = 3$. C'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

ou

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $\forall X \in \mathbb{R}$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$
Ainsi la famille (P_1, P_2, P_3) est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 donc c'est une base.

2. $X^2 - 5X + 4 = aP_1 + bP_2 + cP_3$, c'est un travail d'identification qui conduit à $(a, b, c) = (0, -5, 1)$.

3. $F = \{p \in E \ : \ p(1) = 0\}$.
   - F non vide puisque $X - 1 \in F$.
   - Soit $(P, Q) \in F^2$, $(P + Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0$ et $\deg(P + Q) \leqslant 2$ donc $P + Q \in F$.
   - $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in F$, $(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = 0$ et $\deg(\lambda P) \leqslant 2$ donc $\lambda P \in F$.

   F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\dim F \leqslant 2$. En effet, si $\dim F = 3$, on aurait égalité entre F et $\mathbb{R}_2[X]$ ($F \subset \mathbb{R}_2[X]$) ce qui n'est pas possible puisque tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ n'admet pas 1 comme racine.

   $X - 1 \in F$ et $(X - 1)^2 \in F$. La famille $(X - 1, (X - 1)^2)$ est une famille libre (à vérifier) et donc $\dim F = 2$ et $(X - 1, (X - 1)^2)$ est une base de F.
   Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.