

**EXERCICE 1 :**

Trouver les extrema de la fonction  $f$  définie sur  $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$  par  $f(x) = x^{\ln(\frac{1}{x})}$ .

**EXERCICE 2 :**

Soit  $p \in ]0, 1]$ .

1. Établir que pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$(1+t)^p \leq 1+t^p$$

2. En déduire que pour tout  $x, y \geq 0$ ,

$$(x+y)^p \leq x^p + y^p$$

**EXERCICE 3 :**

Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ .

1. Montrer que  $F + G = \mathbb{R}^3$ .
2. La somme est-elle directe ?

**EXERCICE 4 :**

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$ .

Déterminer une base et un supplémentaire de  $F$ . (on pourra commencer par prouver que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ )

**EXERCICE 5 :**

1. Montrer que la famille  $(1, \sin, \cos)$  est libre dans l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
2. La fonction  $x \mapsto x$  appartient-elle à  $\text{Vect}(1, \cos, \sin)$  ?

**EXERCICE 6 :****EXERCICE 7 :**