EXERCICE 1 :

EXERCICE 2 :

1. On note $\phi : t \longmapsto 1 + t^p - (1+t)^p$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. ϕ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
$\phi(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc ϕ est prolongeable par continuité, on peut poser $\phi(0) = 0$.
Pour $t > 0$,
$$\phi'(t) = p(t^{p-1} - (1+t)^{p-1})$$
Puisque $p - 1 \leqslant 0$, $t^{p-1} \geqslant (1+t)^{p-1}$ et donc $\phi'(t) \geqslant 0$. ϕ est donc croissante sur $[0; +\infty[$ et pour tout $t \geqslant 0$, $\phi(t) \geqslant 0$ et donc, on obtient l'inégalité demandée.

2. Pour $x = 0$, l'inégalité est vérifiée. Pour $x > 0$,
$$(x+y)^p = x^p \left(1 + \frac{y}{x}\right)^p \leqslant x^p \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p\right) = x^p + y^p$$

EXERCICE 3 :

Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\right\}$.

1. *Montrer que* $F + G = \mathbb{R}^3$.
$F = \text{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$, donc $\mathcal{B}_F = \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ est une famille génératrice de F. On peut démontrer que $\mathcal{B}_F$ est libre, ce qui lui confère le statut de base de F. ($\dim(F) = 2$)
$G = \text{Vect}((1,1,0),(-1,0,1))$, donc $\mathcal{B}_G = \{(1,1,0),(-1,0,1)\}$ est une famille génératrice de F. $\mathcal{B}_G$ est libre donc c'est une base de G. ($\dim(G) = 2$)

   $F + G = \text{Vect}(F \cup G) = \text{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,0)) = \text{Vect}(u_1,u_2,u_3) \subset \mathbb{R}^3$ (1).

   $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et $e_1 = \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$, puis $e_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3)$ et enfin $e_3 = u_2 + \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$. Les vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont donc dans $F + G$, d'où $\mathbb{R}^3 \subset F + G$ (2).

   Ainsi d'après (1) et (2), $\mathbb{R}^3 = F + G$.

2. *La somme est-elle directe ?* $(-1,0,1) \in F \cap G$, ainsi la somme n'est pas directe.

EXERCICE 4 :

$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\right\}$.

$F = \text{Vect}(u,v)$ avec $u = (2,1,0)$ et $v = (-3,0,1)$. $\mathcal{B} = (u,v)$ est libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires). $\mathcal{B}$ est une base de F. Toute droite vectorielle $\mathbb{R}w$ tel que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Par exemple $w = (1,0,0)$.

EXERCICE 5 :

1. Soit $\lambda_1.1 + \lambda_2.\cos + \lambda_3 \sin = 0$ une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(1, \cos, \sin)$. Ainsi pour tou $x \in \mathbb{R}$
$$\lambda_1 + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \sin(x) = 0$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et pour $x = \pi$, on a $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. A ce stade, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Maintenant, avec $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ donc $\lambda_3 = 0$: la famille $(1, \cos, \sin)$ est libre.

2. Si la fonction $f : x \longmapsto x$ appartient à $\mathrm{Vect}(1, \cos, \sin)$, alors il existe λ_1, λ_2 et λ_3 telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = \lambda_1 + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \sin(x)$$
on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2 \cos(x)| + |\lambda_3 \sin(x)| \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3|$
Or cette inégalité n'est pas concevable car elle tombe en défaut si l'on fait tendre x vers $+\infty$.
$$\text{Ainsi, } f \notin \mathrm{Vect}(1, \cos, \sin).$$

EXERCICE 6 :

EXERCICE 7 :