Espaces vectoriels de dimension finie

Dans la suite, on notera $\mathbb{K}$ le corps des scalaires.

1 Familles génératrices, familles libres, bases

1.1 Familles génératrices

1.1.1 Définition

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E (c'est-à-dire une liste ordonnées de n vecteurs avec éventuellement des répétitions), on dit la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$. On peut le quantifier par

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Remarques:

1. On suppose seulement l'existence du n-uplets $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ pas l'unicité.
2. On peut reformuler en $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une famille génératrice, si et seulement si
$$\mathrm{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n) = E.$$
3. On omet en général de préciser les corps des scalaires, mais il faut faire attention.
$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1) = \mathbb{C} \neq \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1) = \mathbb{R}.$$

Exemples:

1. (1) est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
2. (1) est une famille génératrice du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais pas du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
3. $(1, i)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
4. $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
5. $((1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1))$ est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.
6. $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

1.1.2 Propriétés

Proposition 1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E, alors toute surfamille $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ est génératrice.*

On dite que $\mathcal{G}$ est une surfamille de $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}$ est une sous-famille de $\mathcal{G}$, si $\mathcal{F}$ est une "liste" extraite de $\mathcal{G}$.

Proposition 2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E et $\mathcal{X}$ une famille quelconque, il y a équivalence entre*

(i) La famille $\mathcal{X}$ est génératrice.

(ii) Tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{X}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathcal{G}, \quad x \in \text{Vect}(\mathcal{X}).$$

Exemples:

1. $(1, j)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\forall i \in [0, n], \quad \deg P_i = i$, alors $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.2 Familles libres

1.2.1 Définition

Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E, on dit que cette famille est libre si

$$\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Elle est liée dans le cas contraire, c'est-à-dire si

$$\exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}, \qquad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Remarques:

1. La liberté d'une famille signifie que la seule combinaison linéaire des vecteurs donnant le vecteur nul est la combinaison linéaire triviale avec des coefficients tous nuls.
2. Attention, en général, on ne précise pas le corps des scalaires, s'il n'y a pas d'ambiguité, mais la liberté peut en dépendre $(1, i)$ est une famille libre de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais une famille liée de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On vérifie à partir des définitions :

Exemples:

1. Une famille d'un seul vecteur non nul est libre.
2. Une famille contenant le vecteur nul est liée.
3. Une famille contenant 2 fois le même vecteur est liée.
4. Deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathbb{R}^2$ forment une famille libre.
5. Trois vecteurs non coplanaires de l'espace $\mathbb{R}^3$ forment une famille libre.
6. $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{K}[X]$.
7. Une famille de polynômes $(P_0, \cdots, P_n)$ de degré tous distincts forment une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.
8. Soient ω_1, ω_2 2 complexes non nuls avec $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$, alors (ω_1, ω_2) est une famille libre de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et une famille liée de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1.2.2 Propriétés

Proposition 3. *On a*

(a) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

(b) Toute surfamille d'une famille liée est liée.

Proposition 4. *Soient $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de l'espace vectoriel E et x un vecteur de E, il y a équivalence entre les 3 propriétés suivantes :*

(i) La famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x)$ est liée.

(ii) $x \in \text{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

(iii) $\exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$

Proposition 5. *Soient $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de l'espace vectoriel E et x un vecteur de* $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$*, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, tel que*

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

1.3 Bases

1.3.1 Définition

Une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ de n vecteurs de E est un base de E, si elle est génératrice et libre.

Exemples:

1. Deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathbb{R}^2$ forment une base.
2. Trois vecteurs non coplanaires de l'espace $\mathbb{R}^3$ forment une base.
3. $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Une famille de polynômes $(P_0, \cdots, P_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ de degré tous distincts forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
5. La famille $((1, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1))$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1.3.2 Caractérisation

Théorème 1. *Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E, il y a équivalence entre*

(i) La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E.

(ii) Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Remarques:

1. L'existence de $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ découle du caractère générateur et l'unicité de la liberté.
2. Le n-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est appelé vecteur des coordonnées de la décomposition de x sur la base $(\mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n)$.

1.3.3 Liens avec les applications linéaires

Proposition 6. *Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ famille de vecteurs de E et φ l' applications linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans E définie par*

$$\varphi((\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n,$$

alors on a

(a) φ *application surjective* $\Longleftrightarrow$ $(e_1, \cdots, e_n)$ *famille génératrice de vecteurs de* E*.*

(b) φ *application injective* $\Longleftrightarrow$ $(e_1, \cdots, e_n)$ *famille libre de vecteurs de* E*.*

(c) φ *application bijective* $\Longleftrightarrow$ $(e_1, \cdots, e_n)$ *base de* E*.*

Corollaire 1. *Soient* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une base de* E *et* ψ *une application linéaire de* E *dans* F*, alors on a*

(a) $(\psi(e_1), \cdots, \psi(e_n))$ *famille génératrice de vecteurs de* $\operatorname{Im}\psi$*.*

(b) ψ *application surjective* $\Longleftrightarrow$ $(\psi(e_1), \cdots, \psi(e_n))$ *famille génératrice de vecteurs de* F*.*

(c) ψ *application injective* $\Longleftrightarrow$ $(\psi(e_1), \cdots, \psi(e_n))$ *famille libre de vecteurs de* F*.*

(d) ψ *application bijective* $\Longleftrightarrow$ $(\psi(e_1), \cdots, \psi(e_n))$ *base de* F*.*

Remarque: *Les 2 assertions (a) et (d) sont les plus importantes.*

Théorème 2. *Soient* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une base du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et* $(f_1, \cdots, f_n)$ *une famille de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* F*, il existe une unique application linéaire* f *de* E *dans* F *tel que*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_i) = f_i.$$

Remarque: Cela se résume à

« Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base. »

2 Dimension d'un espace vectoriel

2.1 Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

Un E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension finie, si il existe une partie génératrice finie de E. Dans le cas contraire, E est un espace vectoriel de dimension infinie.

Exemples:

1. Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^n$ sont de dimension finie.
2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

2.2 Existence d'une base

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie , alors E admet une base.

2.3 Définition de la dimension

Proposition 7. *Soit* $(x_1, \cdots, x_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* E *et* $(y_1, \cdots, y_{n+1})$ $(n+1)$ *vecteurs combinaisons linéaires de* $x_1, \cdots, x_n$*, c'est-à-dire :*

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \qquad y_i \in \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_n),$$

alors la famille $(y_1, \cdots, y_{n+1})$ *est liées.*

Corollaire 2. *Soient* $\mathcal{F}$ *une famille libre de vecteurs de* E *et* $\mathcal{G}$ *une famille génératrice de vecteurs de* E*, alors on a :*

$$\operatorname{card}\mathcal{F} \leq \operatorname{card}\mathcal{G}.$$

Corollaire 3. *Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, le cardinal d'une base de E est indépendant du choix de la base et on appelle dimension ce cardinal notée* $\dim E$.

Remarque: La notation « $\dim E < \infty$ » est parfois utilisée pour dire que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exemples:

1. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ est de dimension 1.
2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.
3. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\{0_E\}$ est de dimension 0.
4. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np.
5. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension 2.
6. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

2.3.1 Propriétés

Proposition 8. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E, si deux des trois propriétés suivantes sont vérifiées*

1. $\dim E = n$
2. $(x_1, \cdots, x_n)$ *est une famille génératrice.*
3. $(x_1, \cdots, x_n)$ *est une famille libre.*

La troisième l'est aussi et alors $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E.

Proposition 9. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , il y a équivalence entre*

(i) E est de dimension infinie.

(ii) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un n-uplet $(x_1, \cdots x_n) \in E^n$, tel que $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille libre.

3 Théorèmes généraux

3.1 Base incomplète

Théorème 3. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ 2 familles de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, avec $\mathcal{F}$ libre et sous-famille de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ famille génératrice, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E, avec $\mathcal{B}$ sous-famille de $\mathcal{G}$ et surfamille de $\mathcal{F}$.*

Corollaire 4. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille libre de vecteurs de E, alors il existe une base $\mathcal{B}$ surfamille de $\mathcal{F}$.*

Remarque: L'idée principale de ce corollaire est la méthode. Si la famille libre $\mathcal{F}$ est aussi génératrice, c'est bon, sinon il existe un vecteur $x \in E \setminus \operatorname{Vect} \mathcal{F}$ et la famille $(\mathcal{F}, x)$ est encore libre.

3.2 Sous-espaces vectoriels et dimension

Proposition 10. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$ et il y a équivalence entre*

(i) $\dim F = \dim E$

(ii) $E = F$.

Remarque: *On utilise beaucoup cette propriété pour montrer l'égalité de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F. On montre l'égalité $\dim F = \dim E$ et seulement une inclusion par exemple $F \subset E$, cela suffit à conclure.*

Proposition 11. *Soit F un sous-espace vectoriel de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors F admet un supplémentaire G dans E et $\dim G = \dim E - \dim F$.*

3.2.1 Relation entre les dimensions

Proposition 12. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors il y a équivalence entre*

(i) F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim F = \dim E$

(ii) F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à E.

Corollaire 5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Une application important de la proposition précédente est

Proposition 13. *Soient $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et $F_{a,b}$ le sous-espace vectoriel de E des suites vérifiant*

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{K} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \end{cases}$$

La dimension de $F_{a,b}$ est 2. On associe à $F_{a,b}$ l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$ et $F_{a,b}$ a pour base :

1. *$((\alpha_1^n), (\alpha_2^n))$, si α_1 et α_2 sont 2 racines distinctes de l'équation caractéristique.*
2. *$((\alpha^n), (n\alpha^n))$, si α est une racine double de l'équation caractéristique.*

Exemple: Si on considère la suite de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

On a calcule les racines de l'équation caractéristique $x^2 = x + 1$ et on trouve la base $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ et on décomposer la suite F_n sur cette base et on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

En particulier, on obtient que

$$F_n \underset{n}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Proposition 14. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de base $(e_1, \cdots, e_n)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m de base $(f_1, \cdots, f_m)$, alors on a*

(a) $E \times F$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et* $\dim E \times F = n + m$.

(b) $((e_1, 0_F), \cdots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \cdots, (0_E, f_m))$ *est une base de* $E \times F$.

Proposition 15. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe de bases respectivement $(f_1, \cdots, f_n)$ et $(g_1, \cdots, g_m)$, alors on a*

(a) $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$.

(b) $(f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_m)$ *est une base de* $F \oplus G$.

Proposition 16 (Formule de Grassmann)**.** *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, alors on a*

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Corollaire 6. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, alors il y a équivalence entre*

(i) $E = F \oplus G$.

(ii) $\dim F + \dim G = \dim E$ *et* $F \cap G = \{0_E\}$.

3.3 Rang d'une application linéaire et théorème du rang

3.3.1 Définitions

- Soient $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on appelle rang de $\mathcal{F}$ noté $\operatorname{rg} \mathcal{F}$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$, c'est-à-dire

$$\operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_n).$$

- Soit f un application linéaire de $\mathrm{L}(E, F)$, on appelle rang de f la dimension de $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Remarque: On relie les deux définitions, dans le cas où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de base $(e_1, \cdots, e_n)$, par

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \operatorname{rg}(f(e_1), \cdots, f(e_n)),$$

car l'image directe d'une application linéaire est engendrée par l'image d'une base.

Exemples:

1. Soit $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ famille de vecteurs de $\mathbb{K}^3$, on a
$$\operatorname{rg} \mathcal{F} = 2,$$
car les 2 premiers vecteurs sont non colinéaires et le troisième est combinaison linéaire des 2 premiers.
2. Soit $\mathcal{G} = \big((x \mapsto 1), (x \mapsto \cos(x)), (x \mapsto \cos(2x), (x \mapsto \cos^2(x)))\big)$ famille de vecteurs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a
$$\operatorname{rg} \mathcal{G} = 3,$$
car les 3 premiers vecteurs forment une famille libre (exercice) et le quatrième est combinaison linéaire des 3 premiers, car $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$.
3. Soit $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ définie $f(x, y, z, t, u) = (x + y, x + 2y - z, y - z, 2t)$, on a
$$f(x, y, z, t, u) = (x + y)(1, 1, 0, 0) + (y - z)(0, 1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 2),$$
on en déduit $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}(1, 1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 0, 2)$, d'où
$$\operatorname{rg} f = 3.$$

3.4 Théorème du rang

Proposition 17. *Soient f une application linéaire de E dans F et E_0 un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} f$ *dans E, alors E_0 et* $\operatorname{Im} f$ *sont isomorphes et $f_{|E_0}$ la restriction de f à E_0 induit un isomorphisme de E_0 sur* $\operatorname{Im} f$.

Théorème 4 (Théorème du rang)**.** *Soient f une application linéaire de E dans F, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie , alors on a*
$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f.$$

3.5 Conséquences

Proposition 18. *Soit f un application linéaire de E dans F, avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie vérifiant* $\dim E = \dim F$, *alors on a équivalence entre*

(i) L'application f est surjective.

(ii) L'application f est injective.

(iii) L'application f est bijective.

Remarque: L'hypothèse de dimension finie est obligatoire, même si $E = F$. Si $E = F = \mathbb{K}[X]$, l'application linéaire $P \mapsto XP$ est injective et non surjective et l'application linéaire $P \mapsto P'$ est surjective non injective.

Exemple: Montrer que l'endomorphisme φ définie sur $\mathbb{K}[X]$ par $\varphi(P) = P(X + 1) - P(X)$ définit un bijection de $X\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}_n[X]$ et l'endomorphisme φ est une surjection de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}[X]$ non injective

Proposition 19. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie , f un application linéaire de E dans F et g un application linéaire de F dans G t, alors on a*

$$\operatorname{rg} g \circ f \leq \min(\operatorname{rg} g, \operatorname{rg} f),$$

on a de plus

1. *f surjective* $\Longrightarrow \operatorname{rg} g \circ f = \operatorname{rg} g$.
2. *g injective* $\Longrightarrow \operatorname{rg} g \circ f = \operatorname{rg} f$.

Remarque: On utilisera souvent cette proposition, sous la forme, composer une application linéaire à droite ou à gauche par un isomorphisme ne change pas le rang.

4 Divers résultats et applications

Cette partie ne contient aucun résultat à apprendre.

4.1 Matrices

On a

	Dimension	Exemple de base
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	np	$(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	n^2	$(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$
L'ensemble des matrices triangulaires sup (respectivement inf) d'ordre n.	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(E_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ (respectivement $(E_{ij})_{1\leq j\leq i\leq n}$)
L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.	n	$(E_k)_{1\leq k\leq n}$
L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques d'ordre n.	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(E_{ij} + E_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$
L'ensemble $\mathcal{A}_n$ des matrices antisymétriques d'ordre n.	$\frac{n(n-1)}{2}$	$(E_{ij} - E_{ij})_{1\leq i< j\leq n}$

Remarque: A part pour les 2 premières lignes, les bases ne sont pas à connaître par coeur, mais il faut savoir les retrouver rapidement au besoin.

4.2 Polynômes de Lagrange

Proposition 20 (Polynôme d'interpolation de Lagrange)**.** *Soient $(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $(n+1)$-uplet de scalaires deux à deux distincts et $(y_0, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $(n+1)$-uplet de scalaires, il existe un unique polynôme P de degré au plus n, tel que*

$$\forall i \in [0, n], \quad P(x_i) = y_i.$$

Preuve :

On utilise l'application linéaire φ de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(x_0), \cdots, P(x_n))$ et on montre que c'est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Remarque: Lorsqu'on recherche l'existence et l'unicité d'une solution à un problème linéaire, on introduit fréquemment un isomorphisme entre des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels bien choisis. Cela ne donne toutefois pas d'information sur la forme de la solution, l'expression de l'isomorphisme réciproque peut-être difficile.

Proposition 21 (Base d'interpolation de Lagrange)**.** *Soient* $(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ *un* $(n+1)$*-uplet de scalaires deux à deux distincts, alors la famille* $(L_0, \cdots, L_n)$ *définie par*

$$\forall i \in [0, n], \quad L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j},$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ *appelée base d'interpolation de Lagrange aux points* $(x_0, \cdots, x_n)$*.*

Si P *est le polynôme d'interpolation tel que*

$$\forall i \in [0, n], \quad P(x_i) = y_i,$$

alors $P = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$*.*

Remarque: L'interpolation de Lagrange a de nombreuses applications en calcul numérique (Calculs approchés d'intégrales, approximation des fonctions ou de données expérimentales par des polynômes etc...) et en algèbre linéaire.