Produit scalaire- Cauchy-Scwarz

Exercice 1 *Les applications suivantes sont-elles des produits scalaires sur les espaces indiqués ?*

1. $E=\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u}=(x,y)$, $\overrightarrow{v}=(x',y')$, $(\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v})=5xx'+3yy'$
2. $E=\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u}=(x,y)$, $\overrightarrow{v}=(x',y')$, $(\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v})=xx'-3yy'$
3. $E=\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u}=(x,y)$, $\overrightarrow{v}=(x',y')$, $(\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v})=xx'$.
4. $E=\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u}=(x,y)$, $\overrightarrow{v}=(x',y')$, $(\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v})=2xx'+5yy'-xy'-x'y$.
5. $E=\mathbb{R}_3[X]$, *si* $P=\sum_{i=0}^{3}a_iX^i$ *et* $Q=\sum_{i=0}^{3}b_iX^i$, $(P\mid Q)=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$.
6. $E=\mathbb{R}_n[X]$, $(P\mid Q)=\sum_{k=0}^{n}P(k)\,Q(k)$.
7. $E=\mathbb{R}_3[X]$, $(P\mid Q)=\sum_{k=0}^{2}P^{(k)}(0)\,Q^{(k)}(0)$.
8. $E=\mathbb{R}_n[X]$, $(P\mid Q)=\int_0^1 P(t)\,Q(t)\left(1-t^2\right)dt$
9. $E=\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, $(f\mid g)=\int_{-1}^1 f(t)\,g(t)\,dt$
10. $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $(f\mid g)=f(0)\,g(0)+\int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,dt$

Exercice 2 *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ *et* $(c_1,\cdots,c_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, *montrer que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_kc_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2c_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2c_k\right)$$

Exercice 3 *Pour* $\overrightarrow{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, *on définit* $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{x^2+5y^2-4xy}$. *Montrer que l'on a bien défini une norme euclidienne, et donner le produit scalaire qui lui correspond.*

Exercice 4 *Montrer que*$(\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v})=xx'+2yy'+3zz'$ *où* $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{v}=(x',y',z')$, *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer* $\max\limits_{x^2+2y^2+3z^2}(x+y+z)^2$.

Exercice 5 *Soit E un espace euclidien,* $a\in E$ *tel que* $\|a\|=1$, *on définit* $\langle x\mid y\rangle=(x\mid y)+k\,(x\mid a)\times(y\mid a)$. *Donner une CNS sur k pour que* $\langle|\rangle$ *soit un produit scalaire sur E.*

Exercice 6 *Soit E un espace euclidien de dimension* $n\geq 1$, *pour* $a\in E$, *on définit* φ_a *par* $\forall x\in E$, $\varphi_a(x)=(a\mid x)$.

1. *Montrer que* $\forall a\in E$, $\varphi_a\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ *et que* $\varphi_a\neq 0\Longleftrightarrow a\neq\overrightarrow{0}$.
2. *On définit alors* $\Phi:E\longrightarrow\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ *par* $\Phi(a)=\varphi_a$. *Montrer que Φ est un isomorphisme de E dans* $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.
3. *Soit* $E=\mathbb{R}_2[X]$ *muni de* $(P\mid Q)=\int_{-1}^1 P(t)\,Q(t)\,dt$. *Justifier qu'il existe* $A\in E$ *unique tel que* $\forall P\in E$, $P\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{-1}^1 P(t)\,A(t)\,dt$ *et déterminer A.*

Othogonalité

Exercice 7 *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, soient F et G deux sous-espaces vectoriels, montrer que :*

1. $F \subset G \Longrightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$
2. $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$
3. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$
4. $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$

Que se passe-t-il lorsque E est un espace euclidien ?

Exercice 8 *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, soit $x \in E$, $x \neq \overrightarrow{0}$ fixé, on définit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(y) = (x \mid y)$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, préciser son noyau.*

Exercice 9 *Soit E un espace euclidien et $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E tels que*

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)^2$$

Montrer que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 10 *Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1])$, on note $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E,\ f'' = f\}$. On définit $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,dt$. Montrer que cela définit un produit scalaire et que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.*

Gram-Schmidt et BON

Exercice 11 *Pour $E = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u} = (x, y)$, $\overrightarrow{v} = (x', y')$, et le produit scalaire $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = 2xx' + 5yy' - xy' - x'y$, donner une base orthonormée construite à partir de la base canonique. On commencera par prouver que l'on a bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 12 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ On définit sur E le produit scalaire*

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{+1} \frac{P(t)\,Q(t)}{1+t^2}\,dt$$

1. *Montrer que φ est bien un produit scalaire.*
2. *Orthogonaliser la base canonique.*

Exercice 13 *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, montrer que pour $(P, Q) \in E^2$, l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\,Q^{(k)}(0)$ définit un produit scalaire. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.*

Exercice 14 *On se place sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.*

1. *Montrer que $(P \mid Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)\,Q(k)$ est un produit scalaire sur E.*
2. *Déterminer la famille de polynôme $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ de E telle que*

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2,\ L_i(j) = \delta_{i,j} \text{ où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

3. *Montrer que l'on obtient une base orthonormée de E.*
4. *Soit $P \in E$, quelles sont les coordonnées de P dans cette base ?*

Exercice 15 *Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \perp y = 0 \Longrightarrow f(x) \perp f(y).$$

1. *Soit* $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ *une base orthonormée de* E*, on pose* $f_i=f(e_i)$*, calculer* $(f_i+f_j \mid f_i-f_j)$ *pour* $(i,j)\in\{1,\cdots,n\}$.
2. *En décuire qu'il existe* $k\in\mathbb{R}_+$ *tel que* $\forall x\in E,\ \|f(x)\|=k\|x\|$.

Projection orthogonale

Exercice 16 *Dans* $\mathbb{R}^4$ *euclidien canonique, soit* $H_1=\operatorname{Vect}(1,1,1,1)^{\perp}$ *et* $H_2=\operatorname{Vect}(1,-1,-1,1)^{\perp}$, *on définit alors* $H=H_1\cap H_2$.

1. *Donner un système d'équation de* H *puis une base orthogonale de* H.
2. *Déterminer la matrice, dans la base canonique de* $\mathbb{R}^4$*, de la projection orthogonale par rapport à* H.

Exercice 17 *Soit* $E=\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire (on le prouvera)* $(f\mid g)=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,g(t)\,dt$. *Donner la projection orthogonale de* $\varphi: x\longmapsto 1-x$ *sur l'espace engendré par* $(x\longmapsto 1, x\longmapsto \sin\pi x, x\longmapsto\cos\pi x)$. *(Il peut être judicieux de vérifier que la famille des trois fonctions données est orthogonale* $\cdots$ *).*

Exercice 18 *Soit* $E=\mathbb{R}_3[X]$, *si* $P=\displaystyle\sum_{i=0}^{3}a_iX^i$ *et* $Q=\displaystyle\sum_{i=0}^{3}b_iX^i$, *on définit le produit scalaire* $(P\mid Q)=\displaystyle\sum_{i=0}^{3}a_ib_i$. *Soit* $H=\{P\in E,\ P(1)=0\}$, *justifier que* H *est un hyperplan et en donner une base. Déterminer* $H^{\perp}$ *et donner la projection orthogonale de* X^3 *sur* H.

Exercice 19 *Soit* $E=\mathbb{R}_3[X]$ *muni du produit scalaire* $(P\mid Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)\,Q(t)\,dt$. *Othogonaliser la famille* $\left(1,X,X^2\right)$ *et donner le projeté orthogonal de* X^3 *sur le sous espace* $F=\operatorname{Vect}\left(1,X,X^2\right)$. *En déduire* $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_{-1}^{1}\left(t^3-at^2-bt-c\right)^2dt$.

Exercice 20 *Soit* E *un espace euclidien, pour* $\alpha\in\mathbb{R}$ *et* a *tel que* $\|a\|=1$ *un vecteur unitaire de* E. *On définit* $f:E\longrightarrow E$ *par* $f(x)=x+\alpha(x\mid a)\,a$. *Déterminer* α *pour que* f *soit une projection, reconnaître alors* f.

Exercice 21 *Soit* E *un espace euclidien et* $p\in\mathcal{L}(E)$. *Montrer que*

$$\begin{aligned} p \text{ projecteur orthogonal} &\iff p\circ p=p \text{ et } \forall(x,y)\in E^2,\ (p(x)\mid y)=(x\mid p(y)) \\ &\iff p\circ p=p \text{ et } \forall x\in E,\ \|p(x)\|\le\|x\| \end{aligned}$$

Exercice 22 *Déterminer* $\displaystyle\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{\pi}(x\sin t+y\cos t-t)^2\,dt$. *On intoduira un produit scalaire judicieux, sur un espace vectoriel ad-hoc.*

Exercice 23 *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$, *pour* $A=((a_{i,j}))\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on définit la trace de* A *par* $tr(A)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{i,i}$.

1. *Montrer que* $\forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $tr({}^tA)=tr(A)$ *et* $tr(AB)=tr(BA)$.
2. *Montrer que* $(A\mid B)=tr({}^tAB)$ *est un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. *On pose* $U=\begin{pmatrix}0&1&0&\ddots\\ \ddots&\ddots&\ddots&0\\ 0&\ddots&\ddots&1\\ 1&0&\ddots&0\end{pmatrix}$, *déterminer* U^k *pour* $0\le k\le n$, *comparer* ${}^tU^k$ *et* U^{n-k}.
4. *Montrer que la famille* $\left(U^k\right)_{0\le k\le n-1}$ *est une famille orthogonale.*
5. *Soit* $F=\operatorname{Vect}\left(\left(U^k\right)_{0\le k\le n-1}\right)$, *donner l'expression de la projection orthogonale de* $A=\begin{pmatrix}1&\cdots&\cdots&1\\ 0&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\ 0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$ *sur* F.